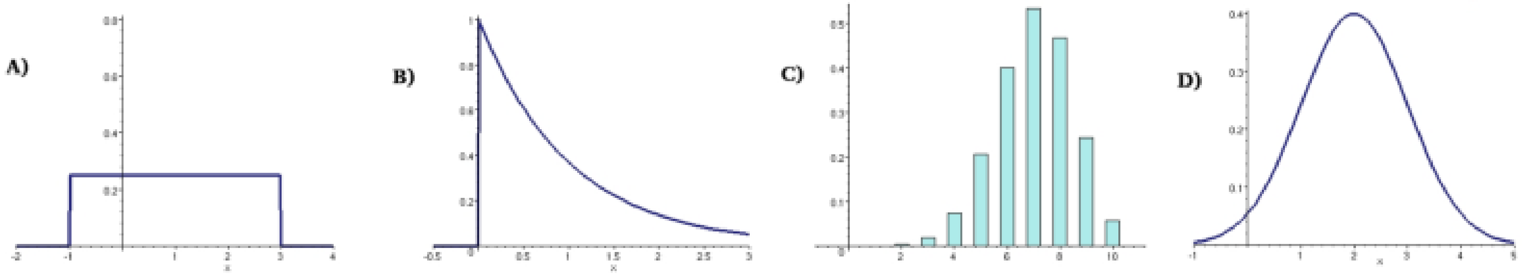
Nella seguente figura sono rappresentati i grafici di 4 densità di probabilità. Indicare qual è la densità normale.



LA NORMALE E' CONTINUA CON SUPPORTO IN TUTTO $\mathbb{R}$ QUINDI

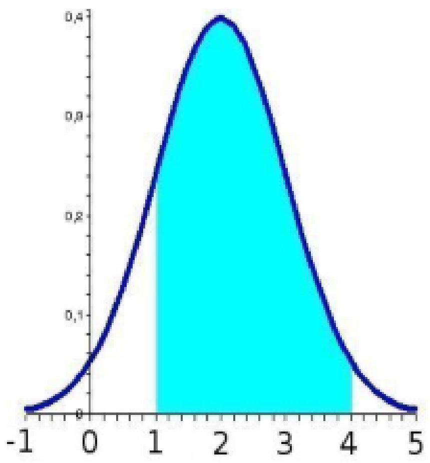
A) NO : SUPPORTO IN $(a,b) \subset \mathbb{R}$

B) NO : SUPPORTO IN $\mathbb{R}^+$

C) NO : DISCRETA

D) SI

A Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una certa variabile aleatoria X. Quanto vale la misura dell'area colorata?



A) $P(1 < X < 4)$; B) $\Phi(4) - \Phi(1)$; C) 3; D) $e^{-8} - e^{-1/2}$.

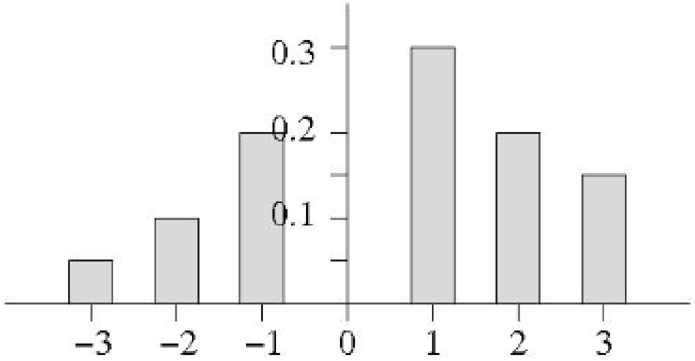
A) SI : DESCRIVE ESATTAMENTE LA REGIONE COLORATA

B) NO : Φ È LA RIPARTIZIONE DELLA $N(0;1)$ E X NON HA MEDIA 0

C) NO : $3 > 1$!

D) NO : $e^{-8} - e^{-1/2} < 0$!

B Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una variabile aleatoria discreta X.



Quanto vale $P(X > 0)$?

A) 0.35; B) 0.65; C) $1 - \Phi(0)$; D) 0.5.

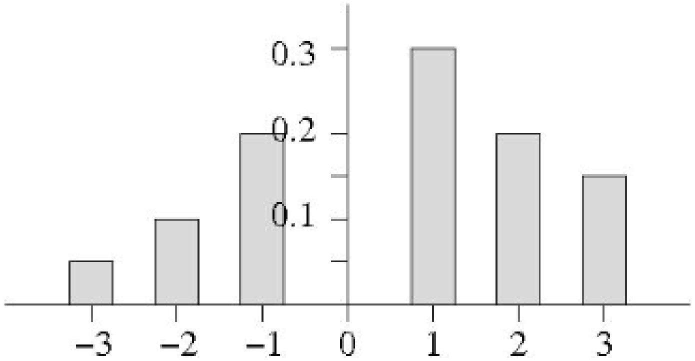
X DISCRETA ⇒

$$\mathbb{P}[X>0] = \sum_{x=1}^{3} p(x) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}65$$

B Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una variabile aleatoria discreta X.

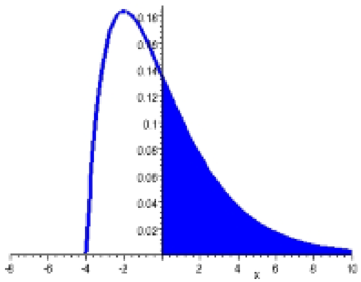
ANALOGO CONTO



Quanto vale $P(X < 0)$?

A) 0.5; B) 0.35; C) $\Phi(0)$; D) 0.

C Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una certa variabile aleatoria X. Quanto vale la misura dell'area colorata?



A) 1/2; B) $X > 0$;
C) $P(X > 0)$; D) $F(0)$ (dove F è la funzione di distribuzione di X).

L'AREA COLORATA RAPPRESENTA IL PESO DELLA REGIONE A DESTRA DELL'ASSE Y DUNQUE SI DESCRIVE CON $\mathbb{P}[X>0]$ CHE È L'OPZIONE C)

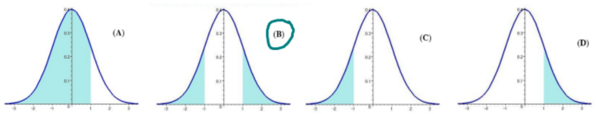
INOLTRE:

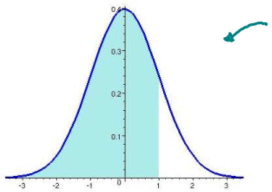
A) NO: X DOVREBBE ESSERE SIMMETRICA INTORNO ALL'ASSE Y (E NON È) OPPURE DOVREBBE ESSERE UN CASO PARTICOLARE

B) NO: $X>0$ È UN EVENTO

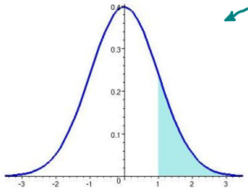
D) NO: SAREBBE PERFETTA SE FOSSE $1-F(0)$ MA $F(0)=\mathbb{P}[X\leq 0]$

B Nelle seguenti figura sono rappresentati i grafici della densità di una $\mathcal{N}(0,1)$. Quale delle aree colorate misura $2\Phi(-1)$?



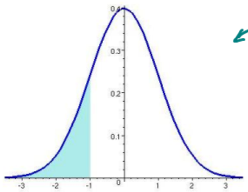


QUI È RAPPRESENTATA: $\mathbb{P}[X \le 1] = \Phi(1)$



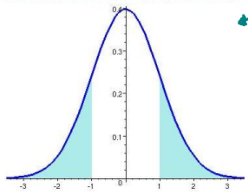
MENTRE QUI ABBIAMO LA REGIONE COMPLEMENTARE CIOÈ:

$$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - \Phi(1)$$



QUESTA È SIMMETRICA DELLA PRECEDENTE QUINDI IL PESO È LO STESSO. DA CUI LA RELAZIONE $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

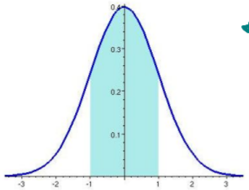
$$\mathbb{P}[X \le -1] = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$



QUESTA È IL DOPPIO DELLA PRECEDENTE

QUINDI $\mathbb{P}[|X| > 1] = 2(1 - \Phi(1))$

OPPURE $= 2\Phi(-1)$



INFINE QUESTA È LA COMPLEMENTARE DELLA PRECEDENTE

QUINDI $\mathbb{P}[|X| \le 1] = 1 - 2 + 2\Phi(1) = 2\Phi(1) - 1$

OPPURE DIRETTAMENTE:

$$\mathbb{P}[|X| \le 1] = \mathbb{P}[X \le 1] - \mathbb{P}[X \le -1] = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$

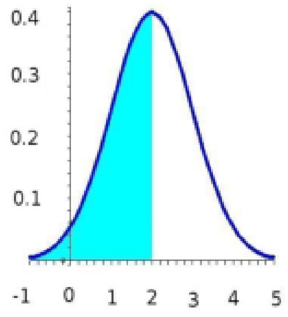
ALTRA STRADA:

$$\mathbb{P}[|X| \le 1] = \mathbb{P}[-1 < X \le 0] + \mathbb{P}[0 < X \le 1] =$$

$$= 2\mathbb{P}[0 < X \le 1] = 2\left(\mathbb{P}[X \le 1] - \mathbb{P}[X \le 0]\right) =$$

$$= 2\left(\Phi(1) - \tfrac{1}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1$$

A Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una variabile aleatoria normale. Quanto vale la misura dell'area colorata?



A) 1/2; B) $\Phi(2)$; C) 2; D) 0.4.

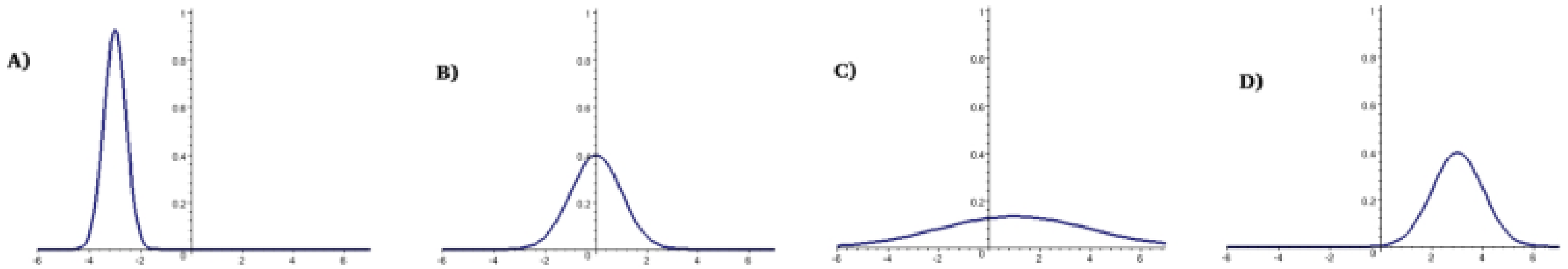
$\mathbb{P}[N(\mu;\sigma^2) \leq \mu] = \frac{1}{2}$ PERCHE' $N(\mu;\sigma^2)$ E' SIMMETRICA INTORNO ALLA MEDIA

QUINDI A) E' OK. INOLTRE B) NO PERCHE' Φ RIFERISCE ALLA NORMALE STANDARD

C) $2 > 1$!

D) 0,4 E' UN NUMERO ACCETTABILE COME VALORE DI PROBABILITA' MA NULLA NEL GRAFICO LO RENDE PLAUSIBILE

D Nella seguente figura sono rappresentati i grafici di 4 densità normali. Indicare qual è la densità normale con media maggiore.



LA NORMALE HA MEDIA NEL MASSIMO DELLA DENSITÀ. DUNQUE BASTA INDIVIDUARE LA CURVA COL MASSIMO PIÙ A DESTRA.

Sia X una variabile aleatoria continua. Allora è necessariamente vero che:

A) $P(X = 1) = 0$; B) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;
C) $E(X) = 0$; D) X è un evento.

A) VERO

B) FALSO: ESISTONO V.A. CONTINUE CHE NON SONO NORMALI

C) FALSO: ESISTONO V.A. CONTINUE CON MEDIA $\neq 0$

D) FALSO: X È UNA V.A.

Sia F la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria. Che valori può assumere $F(x)$?

A) valori in $(-\infty, +\infty)$; B) valori in $[0, 1]$;
C) valori in $[0, +\infty)$; D) valori in $(-\infty, 0]$.

PER DEFINIZIONE F DEVE, TRA L'ALTRO, ESSERE MONOTONA NON DECRESCENTE CON VALORI IN $[0,1]$ QUINDI B) VERA.

INOLTRE:

A) FALSO ALTRIMENTI $\exists x : F(x) < 0$!!!

C) FALSO ALTRIMENTI $\exists x : F(x) > 1$!!!

D) FALSO ALTRIMENTI $F(x) \leq 0 \quad \forall x$!!!

D Data una successione $\{X_i\}_{i\geq 1}$ di variabili aleatorie i.i.d. con media μ e varianza σ^2, è necessariamente vero che:

A) X_n tende a una legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;

B) la media campionaria $\overline{X}_n$ ha legge $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;

C) la media campionaria $\overline{X}_n$ tende a una legge $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;

D) $\frac{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tende a una $\mathcal{N}(0,1)$.

INTANTO CHIARIAMO CHE :

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ È LA SUCCESSIONE CON INFINITI TERMINI

$\bar{X}_n$ INVECE È LA MEDIA CAMPIONARIA CALCOLATA SULLA SUCCESSIONE ARRESTATA AL TERMINE n-ESIMO OVVERO CALCOLATA SUL CAMPIONE $\{X_i\}_{i=1}^{n}$

X_n [SENZA BAR] È SOLO IL TERMINE n-ESIMO DELLA SUCCESSIONE.

DUNQUE:

A) NO : X_n FA PARTE DI UN CAMPIONE i.i.d. DUNQUE NON TENDE. SEMPLICEMENTE, AL CRESCERE DI n, CONTINUA AD AVERE LA STESSA LEGGE DEL CAMPIONE

B) NO : $\bar{X}_n$ HA LEGGE NORMALE SOLO SE TUTTE LE X_i HANNO LEGGE NORMALE

C) NO : LA VARIANZA DI $\bar{X}_n$ NON È σ^2 MA $\frac{\sigma^2}{n}$

D) SI : QUELLA È H^* CIOÈ LA MEDIA CAMPIONARIA STANDARDIZZATA CHE TENDE A $N(0;1)$

C Se X è una v.a. continua con valore atteso $E(X)$ finito e densità f. Allora $E(X)$ è

$$\text{A) } E(X) = \sum_k x_k f(x_k); \quad \text{B) } E(X) = \int_R f(x)dx;$$
$$\text{C) } E(X) = \int_R x f(x)dx; \quad \text{D) } E(X) = \int_k x_k f(x_k).$$

A) NO: X È CONTINUA

B) NO: VALE 1

C) SI: BASTA CONSULTARE IL FORMULARIO

D) NO: $\int_k$ NON È UNA SCRITTURA SENSATA

B Per una v.a. continua X si ha che

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

A) vero solo se a e b non sono valori possibili per X;

B) vero per tutti i valori a e b;

C) vero solo se $a = 0$ e $b = +\infty$;

D) sempre falso.

POICHÈ $\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[X < a] + \mathbb{P}[X = a]$

SE X È CONTINUA ALLORA $\mathbb{P}[X = a] = 0$ E QUINDI B) VERA

SE X È DISCRETA $\mathbb{P}[X = a] = 0$ SE E SOLO SE a NON FA PARTE DEL SUPPORTO E QUINDI A) VERA

A Per una v.a. discreta X si ha che

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

A) vero solo se a e b non sono valori possibili per X;

B) vero per tutti i valori a e b;

C) vero solo se $a = 0$ e $b = +\infty$;

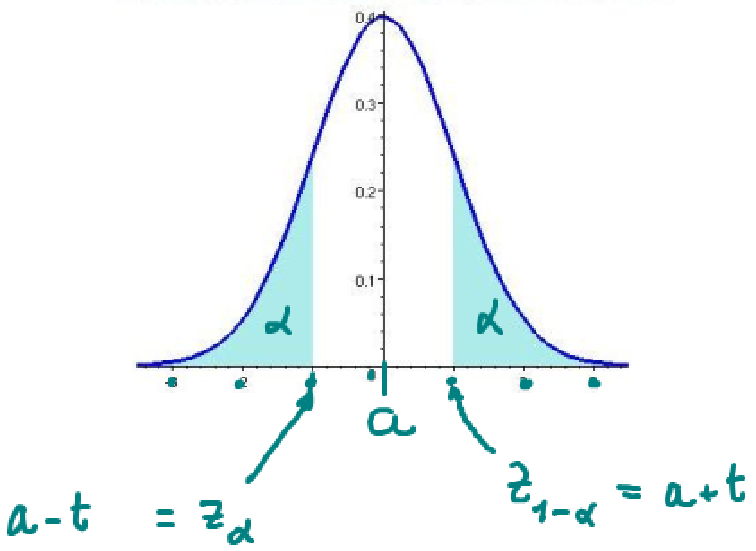
D) sempre falso.

B Se una variabile aleatoria X continua ha la proprietà seguente:
$P(X < -t + a) = P(X > t + a)\ \forall t$, allora detto z_α il quantile della variabile aleatoria si ha:

A) nessuna delle altre risposte è corretta
B) $z_\alpha + z_{1-\alpha} = 2a$
C) $z_\alpha - z_{1-\alpha} = 0$
D) $z_\alpha + z_{1-\alpha} = 0$

RISCRIVIAMO LA RELAZIONE:

$$\mathbb{P}[X - a < -t] = \mathbb{P}[X - a > t]\ \forall t \Rightarrow$$ LA DENSITÀ DI X È SIMMETRICA INTORNO AD a



PERTANTO DETTO $\alpha = \mathbb{P}[X \leq a - t] =$

$= \mathbb{P}[X > a + t]$

ABBIAMO CHE $z_\alpha = a - t$ E $z_{1-\alpha} = a + t$

SOMMANDO RICAVIAMO

$$z_\alpha + z_{1-\alpha} = a - t + a + t = 2a$$

B Se $X \sim \mathcal{P}(3)$ e $Y \sim \mathcal{P}(1)$ sono due variabili aleatorie indipendenti, allora si ha che:

A) $Var[2X + 2Y] = 20$; B) $Var[2X + 2Y] = 16$;
C) $Var[2X + 2Y] = 12$; D) $Var[3X + 3Y] = 18$.

X, Y SONO INDIPENDENTI QUINDI $Var(aX + bY) = a^2 Var X + b^2 Var Y$

INOLTRE X, Y SONO POISSONIANE DUNQUE

$Var X = \lambda_x = 3$ E $Var Y = \lambda_y = 1$

DA CUI $Var[2X + 2Y] = 4(Var X + Var Y) = 4(3+1) = 16$

$\Rightarrow$ BUONA LA B)

D Si consideri una variabile X di Poisson di parametro λ. Allora $2X$:

A) è una variabile di Poisson di parametro 2λ.

B) è una variabile aleatoria continua.

C) è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori interi dispari.

D) è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori interi pari e lo 0.

LA POISSONIANA È DEFINITA SU $\mathbb{N}$ MENTRE $2X$ È DEFINITA SUI PARI E ZERO. QUINDI

A) NO: NON È DI POISSON

B) NO: NON È CONTINUA

C) NO: $2X$ È PARI

D) SI