Esercizio 4 Si consideri la seguente funzione

$$f_k(x) := \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}} & x \in (0,9) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale $k \in \mathbb{R}$.

1. Per quali valori di k la funzione f_k è una densità di una variabile assolutamente continua?
2. Sia X una variabile con la densità calcolata al punto precedente, trovare il valore atteso e la funzione di ripartizione.
3. Un sistema ha due componenti, A e B, in parallelo. Il componente A è formato da 5 componenti in serie (ciascuno) di affidabilità $\mathbb{P}(X \geq 4)$ mentre B è formato da 8 componenti in serie (ciascuno) di affidabilità $\mathbb{P}(X \geq 3)$. Quale componente, tra A e B, è più affidabile? Qual è l'affidabilità complessiva del sistema?

① $\begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \\ 1 = \displaystyle\int_0^9 \frac{k}{\sqrt{x}}\, dx \end{cases}$

$1 = k\, 2\sqrt{x}\Big|_0^9 \Rightarrow k = \dfrac{1}{6}$

② $\mathbb{E}X = \displaystyle\int_0^9 \frac{x}{6\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{6}\,\frac{2}{3}\int_0^9 \frac{3}{2} x^{1/2}\, dx = \frac{1}{9}\, x^{3/2}\Big|_0^9 = 3$

$\mathbb{E}X^2 = \displaystyle\int_0^9 \frac{x^2}{6\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{6}\,\frac{2}{5}\int_0^9 \frac{5}{2} x^{3/2}\, dx = \frac{1}{15}\, x^{5/2}\Big|_0^9 = \frac{81}{5}$

$\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}^2X = \dfrac{81}{5} - \dfrac{45}{5} = \dfrac{36}{5}$

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{6\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{6}\cdot 2\int_0^x \frac{1}{2} t^{-1/2}\, dt = \frac{1}{3}\sqrt{x} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{3} & 0 \leq x \leq 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$

③ $\mathbb{P}[X \geq 4] = 1 - F(4) = \dfrac{1}{3} = \alpha \quad ; \quad \mathbb{P}[X \geq 3] = 1 - F(3) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3} = \beta$

$A_5 = \alpha^5 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \simeq 0.004115 \qquad B_8 = \beta^8 = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 \simeq 0.001018$

$\Rightarrow \quad 1 - (1-\alpha^5)(1-\beta^8) \simeq 0.00513$

Esercizio 1 Un sistema di comunicazioni consiste di n componenti identiche, ognuna delle quali funziona con probabilità p, indipendentemente dalle altre. Il sistema funziona effettivamente se almeno metà delle sue componenti funzionano.

1. Qual è la probabilità di funzionamento del sistema a 5 componenti? E quella del sistema a 3 componenti? Quanto valgono queste due probabilità per $p = 1/2$?
2. Per quale valore di p un sistema a 5 componenti ha maggiore ($\geq$) probabilità di funzionare di un sistema a 3 componenti?
3. Qual è, in funzione di p, il limite della probabilità di funzionamento del sistema quando $n \to +\infty$?

$X_n \sim B(n,p)$

COMPONENTI FUNZIONANTI SU n PRESENTI

$A_n = \left\{ X_n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \right\}$

① $\mathbb{P}[A_5] = \mathbb{P}[X_5 \geq 3] = \sum_{k=3}^{5} \mathbb{P}[X_5 = k] = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} =$

$= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 = 10p^3 - 20p^4 + 10p^5 + 5p^4 - 5p^5 + p^5 = 6p^5 - 15p^4 + 10p^3$

$\mathbb{P}[A_3] = \mathbb{P}[X_3 \geq 2] = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$

SE $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}[A_5] = \frac{10+5+1}{32} = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}[A_3] = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}$

② $6p^5 - 15p^4 + 10p^3 \geq 3p^2 - 2p^3 \qquad 6p^5 - 15p^4 + 12p^3 - 3p^2 \geq 0$

$3p^2 (2p^3 - 5p^2 + 4p - 1) \geq 0$ RUFFINI PER $p = 1$ E $p = \frac{1}{2}$

	2	-5	+4	-1
1		2	-3	1
	2	-3	1	0
1/2		1	-1	
	2	-2	0	

$6p^2 (p-1)^2 (p - \frac{1}{2}) \geq 0$ per $p \geq \frac{1}{2}$

③ $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[A_n] = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[X_n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil] \overset{(*)}{=} 1 - \lim_{n \to +\infty} \phi\left(\frac{\frac{n}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) =$

$= 1 - \lim_{n \to +\infty} \phi\left(\sqrt{n} \, \frac{\frac{1}{2} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right) = \begin{cases} 1 - \phi(-\infty) = 1 & \text{se } p > \frac{1}{2} \\ 1 - \phi(0) = \frac{1}{2} & \text{se } p = 1/2 \\ 1 - \phi(+\infty) = 0 & \text{se } p < 1/2 \end{cases}$

(*) $\left\{ X_n \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \right\} \equiv \left\{ X_n \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right\}^c$

NOTAZIONE

$\lceil a \rceil = \text{INT}(a) + 1$

$\lfloor a \rfloor = \text{INT}(a)$