Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

1.1. Spazi di funzioni

Sia I un intervallo e sia $\mathcal{F}_I$ l'insieme di tutte le funzioni definite sull'intervallo I a valori reali. In questo spazio sono definite in maniera naturale le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare come segue

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x).\end{aligned}$$

Con queste operazioni $\mathcal{F}_I$ risulta uno spazio vettoriale. Considereremo nel seguito alcuni sottospazi di $\mathcal{F}_I$ con opportune proprietà di regolarità.
Indichiamo con $\mathcal{C}(I)$ o anche $\mathcal{C}^0(I)$ l'insieme di tutte le funzioni continue in I. Si tratta di un sottospazio vettoriale perché una combinazione lineare di funzioni continue è ancora una funzione continua.
Indichiamo con $\mathcal{C}^1(I)$ l'insieme di tutte le funzioni derivabili in I con derivata continua in I. Notiamo che $\mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$ anzi è un suo sottospazio.

☞ **Osservazione 1.1.1.** Se f è derivabile allora f è anche continua; tuttavia questo non significa che $f \in \mathcal{C}^1(I)$, cioè non significa che f' sia a sua volta continua. Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Infatti, se $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$$

mentre per $x = 0$ si ha

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

ma $f'(x)$ non è continua perché $\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste (ed in particolare non coincide con $f'(0) = 0$).
Dunque chiedere $f \in \mathcal{C}^1(I)$ è qualcosa in più rispetto al fatto di chiedere che f sia continua e derivabile. Se $f \in \mathcal{C}^1(I)$ allora si dice anche f derivabile con continuità.

Per la linearità della derivata, possiamo dunque dire che l'operatore di derivazione è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriali $\mathcal{C}^1(I)$ e $\mathcal{C}^0(I)$.
Generalizzando queste considerazioni definiamo $\mathcal{C}^k(I)$ lo spazio delle funzioni dotate di derivata k-esima (e quindi anche di tutte le derivate di ordine inferiore) e con la derivata k-esima continua. Vale la catena di inclusioni

$$\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I) \supset \ldots$$

L'operatore che associa a una funzione la sua derivata di ordine $h \geq 1$ si può vedere come un operatore lineare da $\mathcal{C}^{k+h}(I)$ a $\mathcal{C}^k(I)$ per ogni $k \geq 0$.

1.2. Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine: generalità

In questo paragrafo andremo a studiare una classe particolare di equazioni differenziali ordinarie: quelle del secondo ordine lineari; la linearità è il punto cruciale per determinare la struttura dell'integrale generale.

❒ **Definizione 1.2.1.** Un'equazione differenziale del secondo ordine si dice lineare se è del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \tag{1.2.1}$$

dove i coefficienti a_i e il termine noto g sono funzioni definite in un certo intervallo I e continue nello stesso intervallo. L'equazione si dice omogenea se g è identicamente nullo; in caso contrario si dice completa. L'equazione si dice a coefficienti costanti se i coefficienti a_i sono costanti (per inciso, il termine noto può invece dipendere da t); in caso contrario si dice a coefficienti variabili. Infine se a_1 non si annulla mai, l'equazione si può riscrivere in in forma normale come

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t). \tag{1.2.2}$$

In tal caso l'equazione omogenea associata diventa

$$z'' + a(t)z' + b(t)z = 0. \tag{1.2.3}$$

☞ **Osservazione 1.2.2.** Consideriamo il seguente operatore

$$L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$$
$$L : y \mapsto Ly$$

dove gli spazi $\mathcal{C}^k(I)$, come abbiamo già accennato, sono gli spazi delle funzioni continue, derivabili fino all'ordine k e con tutte le derivate fino all'ordine k continue e dove abbiamo indicato con Ly il primo membro dell'equazione (1.2.1). Prima di tutto l'operatore è ben definito, perché se $y \in \mathcal{C}^2$ si ha che $Ly \in \mathcal{C}^0(I)$ e questo grazie alla continuità dei coefficienti a_i. Inoltre è facile dimostrare che L è un operatore lineare, nel senso che per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, per ogni $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$ si ha

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2.$$

Questa proprietà dell'operatore L giustifica il motivo per cui l'equazione (1.2.1) è detta lineare.

✎ **Esempio 1.2.3.** *Il più semplice esempio di equazione lineare del secondo ordine è*

$$y''(t) = 0.$$

Essa naturalmente equivale a dire che $y'(t) = C_1$ e da cui $y(t) = C_1 t + C_2$, con C_1, C_2 costanti arbitrarie. Quindi le soluzioni di questa equazione sono tutti e soli i polinomi di primo grado.

✎ **Esempio 1.2.4.** (l'oscillatore armonico) *Consideriamo un punto materiale di massa m che rimane libero di muoversi in linea orizzontale, attaccato a una molla che esercita una forza di richiamo di tipo elastico. Denotiamo con $y(t)$ la posizione del punto sulla retta (rispetto alla configurazione di riposo). Allora si può dimostrare che y soddisfa l'equazione*

$$my'' = -ky$$

dove $k > 0$ denota la costante elastica del sistema. Siccome ovviamente $m \neq 0$, allora si può riscrivere l'equazione in forma normale come

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{1.2.4}$$

dove $\omega^2 = k/m$. L'equazione prende il nome di oscillatore armonico.
L'equazione (1.2.4) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare omogenea e a coefficienti costanti. Se sul punto agisce una forza esterna (dipendente solo dal tempo t) l'equazione si riscrive come

$$y'' + \omega^2 y = f(t);$$

nel caso venga presa in considerazione lo smorzamento dovuto all'attrito, l'equazione si trasforma in

$$y'' + hy' + \omega^2 y = 0$$

con $h > 0$.

Sarà chiaro in seguito che l'integrale generale di una qualunque equazione lineare del secondo ordine dipende da due parametri arbitrari. Quindi per selezionare una soluzione all'interno della famiglia di soluzioni stavolta, differentemente da quanto visto nel caso delle equazioni differenziali del primo ordine, dovremo assegnare due condizioni.

❒ **Definizione 1.2.5.** Si dice PROBLEMA DI CAUCHY per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine (per semplicità la consideriamo espressa in forma normale), il problema

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Teorema 1.2.6. (ESISTENZA E UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY) *Siano a, b, f funzioni continue in un intervallo $I \ni t_0$. Allora per ogni $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy* (1.2.5) *ammette un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^2(I)$.*

Questo risultato è analogo al corrispondente enunciato per le equazioni lineari del primo ordine. Anche in questo caso, la soluzione sarà ottenuta imponento le condizioni iniziali nell'espressione che individua l'integrale generale dell'equazione (1.2.2). Quindi di nuovo il problema si riduce a comprendere come ottenere la *struttura dell'integrale generale* per un'equazione del tipo (1.2.2).

1.3. La struttura dell'integrale generale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che un'equazione differenziale lineare del secondo ordine si può scrivere nella forma $Ly = f$, dove $L : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ è un operatore lineare tra due spazi di funzioni continue. L'equazione (1.2.3) si scrive come $Lz = 0$ e si dice EQUAZIONE OMOGENEA associata all'equazione completa $Ly = f$. Il seguente teorema permette di determinare facilmente la struttura dell'integrale generale dell'equazione (1.2.2). Questo risultato non usa il fatto che $Ly = f$ sia un'equazione differenziale e non dipende dall'ordine dell'equazione, sfrutta solamente il fatto che L è un operatore lineare.

Teorema 1.3.1. (STRUTTURA INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE COMPLETA)

1) l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lz = 0$ in un dato intervallo I è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$);

2) *l'integrale generale dell'equazione completa* $Ly = f$ *si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa.*

1) Siano $z_1, z_2 \in \mathcal{C}^2(I)$ due soluzioni dell'equazione omogenea in I e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Allora:

$$L(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1 L(z_1) + \lambda_2 L(z_2) = 0$$

dove il primo passaggio è dovuto alla linearità di L, il secondo dal fatto che per ipotesi z_1, z_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea. Perciò anche $\lambda z_1 + \lambda z_2$ risolve l'equazione omogenea, dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale, in particolare è un sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$.
La dimostrazione del fatto che tale spazio vettoriale ha dimensione due si basa unicamente sul Teorema 1.2.6. Siano z_1, z_2 rispettivamente le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy nell'intervallo I con $t_0 \in I$ fissato

$$\begin{cases} Lz_1 = 0 \\ z_1(t_0) = 1 \\ z_1'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Lz_2 = 0 \\ z_2(t_0) = 0 \\ z_2'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che le soluzioni z_1, z_2 dell'equazione omogenea (1.2.3) riscritta come $Lz = 0$ sono linearmente indipendenti, perché il quoziente $z_2(t)/z_1(t)$ si annulla in $t_0 = 0$ e pertanto se fosse costantemente identicamente zero, allora $z_2(t) \equiv 0$ ma ciò sarebbe in contrasto con $z_2'(t_0) = 1$.
D'altra parte, ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di z_1 e z_2 in I: infatti sia

$$z_0(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) \qquad \forall t \in I.$$

Scegliendo $c_1 = z_0(t_0)$, $c_2 = z_0'(t_0)$ si ha

$$(c_1 z_1 + c_2 z_2)(t_0) = z_0(t_0) \qquad (c_1 z_1 + c_2 z_2)'(t_0) = z_0'(t_0)$$

e pertanto la funzione $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lz = 0 \\ z(t_0) = z_0(t_0) \\ z'(t_0) = z_0'(t_0) \end{cases}$$

ma ovviamente anche z_0 risolve il medesimo problema, quindi dall'unicità della soluzione per il problema di Cauchy si ha che

$$z_0(t) = (c_1 z_1 + c_2 z_2)(t) \qquad \forall t \in I.$$

2) Siano y_1 una soluzione particolare dell'equazione completa e sia z_0 una generica soluzione dell'equazione omogenea, ossia $L(y_1) = f$ e $L(z_0) = 0$. Allora per linearità

$$L(y_1 + z_0) = Ly_1 + Lz_0 = f + 0 = f$$

ossia $y_1 + z_0$ è soluzione dell'equazione completa. Viceversa, se y_2 è una qualsiasi soluzione dell'equazione completa, cioè $Ly_2 = f$, e (come prima) y_1 è una soluzione particolare dell'equazione completa, allora per linearità

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = f - f = 0$$

ossia $y_2 - y_1$ è soluzione dell'omogenea, cioè $y_2 - y_1 = z_0$ per una certa z_0 soluzione dell'equazione omogenea. Dunque

$$y_2 = y_1 + z_0$$

ossia la generica soluzione dell'equazione completa si può scrivere come somma di una particolare soluzione y_1 dell'equazione completa (fissata una volta per tutte) e di una soluzione dell'equazione omogenea.

☞ **Osservazione 1.3.2.** Dal punto 1) del teorema precedente possiamo dedurre che esistono due soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ dell'equazione omogenea che sono lineamente indipendenti (ovvero non sono una multipla dell'altra) e ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di z_1 e z_2; quindi questo significa che l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato dalla formula

$$C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare dei coefficienti reali C_1, C_2.

✎ **Esempio 1.3.3.** *Si consideri l'equazione* $t^2 z'' - 3tz' + 3z = 0$. *Sia* $z_1 = t$. *Allora* $z_1'(t) = 1$, $z_1''(t) = 0$ *da cui* $t^2\, 0 - 3t\, 1 + 3t = -3t + 3t = 0$; *quindi* z_1 *è una soluzione dell'equazione data. Sia ora* $z_2 = t^3$. *Allora* $z_2'(t) = 3t^2$ *e* $z_2''(t) = 6t$ *da cui inserendo le informazioni nell'equazione si ottiene* $t^2\, 6t - 3t\, 3t^2 + 3\, t^3 = 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$; *quindi anche* $z_2(t) = t^3$ *è soluzione dell'equazione data. Le due soluzioni sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale dell'equazione è dato da*

$$z(t) = C_1\, t + C_2\, t^3,$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nel caso precedente è particolarmente facile vedere che le due soluzioni proposte sono linearmente indipendenti; in generale può non essere così immediato. Il seguente criterio generale permette di decidere qualora due soluzioni proposte siano o no linearmente indipendenti.

Teorema 1.3.4. (determinante wronskiano e indipendenza) *Siano z_1, z_2 due funzioni $\mathcal{C}^2(I)$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea*

$$Lz \equiv z'' + a(t)z' + b(t)z = 0$$

nell'intervallo I. Allora esse sono linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^2(I)$ se e soltanto se la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

detta matrice Wronskiana *ha determinante diverso da zero per ogni $t \in I$ (dalla regolarità delle soluzioni, è sufficiente che il determinante di tale matrice sia diverso da zero in un punto $t_0 \in I$).*

L'ultima parte del teorema si può anche esprimere nel seguente modo: il determinante della matrice Wronskiana (detto brevemente Wronskiano) o si annulla in tutti i punti di I, oppure è diverso da zero in tutti i punti di I. Nel secondo caso z_1 e z_2 sono linearmente indipendenti.

Siano z_1, z_2 due funzioni di $\mathcal{C}^2(I)$ linearmente dipendenti. Quindi esistono due costanti $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ tali che

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Derivando rispetto a t questa identità si trova

$$c_1 z_1'(t) + c_2 z_2'(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

e quindi i numeri (c_1, c_2) sono una soluzione non banale del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) = 0 \\ c_1 z_1'(t) + c_2 z_2'(t) = 0 \end{cases}$$

che pertanto (per la teoria dei sistemi lineari) deve avere determinante nullo, per ogni $t \in I$. Ma il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è proprio il Wronskiano. Quindi

$$z_1, z_2 \text{ linearmente dipendenti } \Rightarrow \text{ Wronskiano identicamente nullo}$$

e questo è equivalente a dire

$$\text{Wronskiano diverso da zero in un punto } t_0 \Rightarrow z_1, z_2 \text{ linearmente indipendenti.}$$

Ora proviamo il viceversa, ma solo per z_1, z_2 soluzioni dell'equazione omogenea linearmente indipendenti.
Siano dunque z_1, z_2 soluzioni dell'equazione omogenea linearmente indipendenti; mostriamo che il Wronskiano non si annulla mai.
Supponiamo per assurdo che si annulli in un punto t_0. Allora esiste una soluzione non banale del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) = 0 \\ c_1 z_1'(t) + c_2 z_2'(t) = 0. \end{cases}$$

Sia z la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'' + a(t)z' + b(t)z = 0 \qquad\qquad z(t_0) = c_1 z_1(t_0) + c_2 z_2(t_0) = 0 \\ z'(t_0) = c_1 z_1'(t_0) + c_2 z_2'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Sappiamo che la funzione identicamente nulla soddisfa queste condizioni e d'altra parte anche la funzione $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$ lo soddisfa. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy segue che $c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) \equiv 0$ in I, ossia z_1, z_2 sono dipendenti, in contrasto con l'ipotesi.

Riassumendo: per determinare l'integrale generale dell'equazione completa occorre:
1) determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea, quindi serve determinare 2 soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ dell'equazione omogenea linearmente indipendenti;
2) determinare una soluzione particolare $\overline{y}(t)$ dell'equazione completa.
A questo punto l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da

$$\overline{y}(t) + C_1\, z_1(t) + C_2\, z_2(t)$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che in generale risolvere tale problema non è affatto banale e noi riusciremo a farlo solo in alcuni casi particolari. Nei prossimi paragrafi mostreremo come fare.

1.4. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \qquad a, b \text{ costanti.} \tag{1.4.1}$$

In analogia con il caso analogo del primo ordine, che ammette degli esponenziali come soluzioni, cerchiamo anche qui delle soluzioni di tipo esponenziale $t \mapsto e^{rt}$, con $r \in \mathbb{C}$. Sostituendo

$z(t) = e^{rt}$ in (1.4.1) otteniamo

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Siccome l'esponenziale è una funzione sempre positiva, affinché l'equazione precedente abbia soluzione è necessario che la costante r sia una radice dell'equazione di secondo grado

$$r^2 + ar + b = 0$$

che viene detta *equazione caratteristica* della (1.4.1). Si possono distinguere tre casi, a seconda del segno del discriminante.

• PRIMO CASO $\triangle = a^2 - 4b > 0$. In tal caso l'equazione caratteristica possiede due radici reali e distinte r_1 e r_2; quindi le funzioni $z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono due soluzioni distinte e indipendenti della (1.4.1) il cui integrale generale si scrive

$$\boxed{z(t) = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{r_2 t}.}$$

• SECONDO CASO $\triangle = a^2 - 4b = 0$. In tal caso l'equazione caratteristica possiede l'unica radice (con doppia molteplicità) $r = -a/2$; quindi una soluzione è sicuramente

$$z(t) = C\, e^{-\frac{a}{2}t} \tag{1.4.2}$$

Per trovare una seconda soluzione usiamo (come nel caso delle equazioni del primo ordine) di nuovo il metodo delle variazione delle costanti. La cerchiamo simile alla (1.4.2) con l'idea che stavolta la costante dipenda da t, cioè nella forma

$$z(t) = C(t)\, e^{rt}, \qquad r = -\frac{a}{2}.$$

Da cui

$$z'(t) = e^{rt}(rC(t) + C'(t)), \qquad z''(t) = e^{rt}(r^2 C(t) + 2rC'(t) + C''(t))$$

quindi sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)C(t) + (2r + a)C'(t) + C''(t)] = 0.$$

Siccome ricordiamo che $r = -a/2$, allora il coefficiente davanti alla $C'(t)$ si annulla; inoltre r è soluzione dell'equazione caratteristica quindi anche il coefficiente davanti alla $C(t)$ si annulla; quindi deve necessariamente essere $C''(t) = 0$ da cui $C(t) = C_2 t + C_1$. Allora la soluzione generale dell'equazione (1.4.1) si può scrivere come

$$\boxed{z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 + C_2 t).}$$

• TERZO CASO $\triangle = a^2 - 4b < 0$. In tale caso l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ (con α e β reali). Quindi soluzioni (indipendenti) della (1.4.1) sono le funzioni

$$z_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t); \qquad z_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t).$$

A volte è preferibile avere delle soluzioni reali; quindi ricordando che ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione dell'equazione, allora invece che z_1 e z_2 scegliamo $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ e $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$, cioè

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad \text{e} \qquad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

L'integrale generale della (1.4.1) si può dunque scrivere nella forma

$$\boxed{z(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)}$$

o in maniera del tutto equivalente (ricordando lo sviluppo del coseno di una somma)

$$\boxed{z(t) = e^{\alpha t}A\cos(\beta t + \varphi).}$$

Riassumendo: in ciascuno dei tre casi studiati abbiamo determinato due soluzioni dell'equazione omogenea che risultano linearmente indipendenti:

Caso $\triangle > 0$	$e^{r_1 t}$	$e^{r_2 t}$
Caso $\triangle = 0$	e^{rt}	te^{rt}
Caso $\triangle < 0$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$

✎ **Esempio 1.4.1.** *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} z'' - 2z' - 3z = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione proposta è differenziale ordinaria del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

che dà come soluzioni $r = -1$ e $r = 3$. Quindi da quanto detto sopra l'integrale generale dell'equazione risulta

$$z(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{3t},$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Imponendo i dati di Cauchy si deduce

$$1 = z(0) = C_1 + C_2; \qquad 2 = z'(0) = -C_1 + 3\,C_2$$

da cui

$$C_1 = \frac{1}{4}; \qquad C_2 = \frac{3}{4}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$z(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}\,e^{3t}.$$

1.5. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza

In questo paragrafo ci occupiamo di trovare un integrale particolare dell'equazione completa associata a un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti del tipo

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t), \qquad a, b\,\text{costanti} \tag{1.5.1}$$

nel caso in cui il termine noto $f(t)$ abbia una forma particolare. Un metodo più generale (ma anche di solito più complesso a livello di calcoli) si basa sul metodo di variazione delle costanti. Invece quando f ha una forma particolarmente semplice, un'idea alternativa è quella di cercare una soluzione che *assomigli* a f nel senso che andremo a specificare.

- PRIMO CASO: $f(t) = p_r(t)$ polinomio di grado r. In tal caso si cerca una soluzione che sia anch'essa un polinomio, con le seguenti caratteristiche:

dove $q_r(t)$ è il generico polinomio di grado r di cui bisogna determinare i coefficienti.

$\overline{y}(t) = q_r(t)$	se $b \neq 0$
$\overline{y}(t) = t\,q_r(t)$	se $b = 0$ e $a \neq 0$
$\overline{y}(t) = t^2\,q_r(t)$	se $b = 0$ e $a = 0$

• SECONDO CASO: $f(t) = A\,e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. In tal caso si cerca una soluzione del tipo $y(t) = e^{\lambda t}\,\gamma(t)$. Con calcoli del tutto simili a quelli svolti per l'equazione omogenea si ottiene

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\,\lambda + b) = A.$$

Osserviamo che è sufficiente trovare una qualunque γ tale che l'equazione precedente sia soddisfatta. Quindi possiamo distinguere i seguenti casi:
a) Se $\lambda^2 + a\,\lambda + b \neq 0$ (cioè se λ non è radice dell'equazione caratteristica) basta prendere

$$\gamma(t) = \text{ costante } = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

da cui

$$\overline{y}(t) = \frac{A\,e^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\,\lambda + b}.$$

Quindi una soluzione particolare della (1.5.1) può essere scritta nella forma

$$\overline{y}(t) = C\,e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{C}$ (e quindi visto che basta trovare una soluzione particolare posso anche scegliere $C \in \mathbb{R}$).
b) Se $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$, allora basta prendere

$$\gamma'(t) = \text{ costante } = \frac{A}{2\lambda + a} \qquad \text{da cui} \qquad \gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}.$$

Quindi si ha

$$\overline{y}(t) = \frac{A\,t\,e^{\lambda t}}{2\lambda + a}.$$

perciò una soluzione particolare della (1.5.1) può essere scritta nella forma

$$\overline{y}(t) = C\,t\,e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{C}$ (e quindi di nuovo posso anche scegliere $C \in \mathbb{R}$).
c) Se infine $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$ allora semplicemente si ha $\gamma''(t) = A$ da cui

$$\gamma(t) = \frac{A}{2}\,t^2, \qquad \overline{y}(t) = \frac{A}{2}\,t^2\,e^{\lambda\,t}.$$

Quindi una soluzione particolare della (1.5.1) può essere scritta nella forma

$$\overline{y}(t) = C\,t^2\,e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che in questa classe particolare di termini noti del tipo $A\,e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ rientrano anche i casi

$$\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ e^{\mu t}\,\cos\omega t,\ e^{\mu t}\sin\omega t \ \text{ con } \mu \in \mathbb{R}.$$

✎ **Esempio 1.5.1.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Cerchiamo una soluzione del tipo generico polinomio di secondo grado

$$\overline{y}(t) = C_0 + C_1\, t + C_2\, t^2.$$

Siccome si ha

$$\overline{y}'(t) = C_1 + 2\, C_2\, t, \qquad \overline{y}''(t) = 2\, C_2$$

inserendo queste informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$2\, C_2 - 3(C_1 + 2\, C_2\, t) + 2(C_0 + C_1\, t + C_2\, t^2) = 1 + t^2.$$

A questo punto vado a uguagliare i coefficienti dei termini con lo stesso grado, a destra e a sinistra, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2\, C_2 - 3\, C_1 + 2\, C_0 = 1 \\ -6\, C_2 + 2\, C_1 = 0 \\ 2\, C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente

$$C_0 = \frac{9}{4}; \qquad C_1 = \frac{3}{2}; \qquad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\overline{y}(t) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\, t + \frac{1}{2}\, t^2.$$

✎ **Esempio 1.5.2.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 2y' = t$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Osserviamo che il termine noto è di primo grado ma nell'equazione manca il termine in y; quindi si ricade nel caso b) elencato in precedenza. Quindi cerchiamo una soluzione del tipo polinomio di secondo grado della forma

$$\overline{y}(t) = C_1\, t + C_2\, t^2$$

Con semplici calcoli si deduce che deve essere

$$2\, C_2 + 2C_1 + 4\, C_2 t = t$$

quindi

$$\begin{cases} 4\,C_2 = 1 \\ 2C_1 + 2\,C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$C_1 = -\frac{1}{4}; \qquad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\overline{y}(t) = -\frac{1}{4}\,t + \frac{1}{4}\,t^2.$$

✎ **Esempio 1.5.3.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 2y' + 3y = 3\,e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per quanto detto sopra, possiamo cercare una soluzione particolare del tipo $\overline{y}(t) = C\,e^{3t}$. Da cui con semplici calcoli

$$C\,e^{3t}(9 + 2\cdot 3 + 3) = 18\,C\,e^{3t} = 3\,e^{3t}$$

quindi $C = 1/6$ e $\overline{y}(t) = \frac{1}{6}\,e^{3t}$.

✎ **Esempio 1.5.4.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' - 2y' - 3y = 3\,e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Ripetendo lo stesso ragionamento dell'esempio precedente, quindi andando a cercare una soluzione particolare del tipo $\overline{y}(t) = C\,e^{3t}$ si ottiene

$$C\,e^{3t}(9 - 2\cdot 3 - 3) = 0 = 3\,e^{3t}$$

quindi non esiste una costante C (nemmeno in campo complesso) tale per cui la funzione $\overline{y}$ proposta risolva l'equazione data. Questo perché a ben vedere $r = -3$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata $r^2 - 2r - 3 = 0$. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo $\overline{y}(t) = C\,t\,e^{3t}$. Si ottiene innanzitutto

$$\overline{y}'(t) = C\,e^{3t} + 3C\,t\,e^{3t}; \qquad \overline{y}''(t) = 6\,C\,e^{3t} + 9\,C\,t\,e^{3t}$$

da cui inserendo nell'equazione si ottiene $C = 3/4$. Una soluzione particolare è dunque

$$\overline{y}(t) = \frac{3}{4}\,t\,e^{3t}.$$

☞ **Osservazione 1.5.5.** Quando il termine noto è del tipo $A\, e^{\mu t}\, \cos(\omega t)$, ricordando che

$$Ae^{(\mu+i\omega)t} = Ae^{\mu t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

si può procedere risolvendo l'equazione con il termine noto $A\, e^{(\mu+i\omega)t}$ e poi prendere la parte reale di tale soluzione complessa; per linearità infatti troveremo la soluzione con il termine noto cercato. Analogamente se il termine noto è della forma $Ae^{\mu t} \sin(\omega t)$ si procede andando a prendere la parte immaginaria. Alternativamente, si può pensare di procedere senza usare i numeri complessi: in tal caso si deve andare a cercare una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(t) = e^{x}(C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x)).$$

Usualmente comunque l'uso dell'esponenziale complesso rende i calcoli delle derivate di y meno laboriosi. Inoltre, anche se il termine noto contiene solo seno oppure coseno, quando si cerca una soluzione particolare si deve sempre cercare come combinazione lineare di entrambi seno e coseno.

✍ **Esercizio 1.5.6.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 2y' - y = 2\, e^{x}\, cos(3x).$$

➻ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(t) = \frac{2\, e^{x}}{193}(-7 \cos 3x + 12 \sin 3x)$$

☞ **Osservazione 1.5.7.** (metodo di sovrapposizione) Nel caso in cui $f(t)$ sia combinazione lineare di termini appartenenti a due tipologie diverse (esempio polinomio più esponenzale o polinomio più funzione trigonometrica) per linearità prima si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo termine del termine noto originario, poi si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo termine del termine noto originario e infine una soluzione dell'equazione di partenza sarà la somma delle due soluzioni trovate.

✍ **Esercizio 1.5.8.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 3y = t + 2 \cos t$$

➻ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(t) = \frac{t}{3} + \cos t.$$

1.6. Metodo di variazione delle costanti

Si tratta di un metodo generale che consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa *qualunque sia la forma del termine noto* $f(t)$. Questo metodo è applicabile purché si conoscano già due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea e funziona anche nel caso di equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili (ma in quel caso non ci sono metodi generali per determinare due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea).
Siano dunque $z_1(t), z_2(t)$ due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata a un intervallo I. L'idea è quella di cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = C_1(t)z_1(t) + C_2(t)z_2(t) \tag{1.6.1}$$

dove z_1, z_2 sono note, mentre le funzioni C_1, C_2 sono incognite e vanno determinate in modo che $\bar{y}$ soddisfi l'equazione

$$y'' + ay' + by = f \qquad \text{in } I.$$

Questa equazione fornirà una condizione su C_1 e C_2. Poiché le funzioni da determinare sono due, dobbiamo imporre una seconda condizione su C_1 e C_2 che sceglieremo in maniera opportuna.
Cominciamo col calcolare

$$\bar{y}' = C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_1z_1' + C_2z_2'.$$

Scegliamo di imporre

$$C_1'z_1 + C_2'z_2 = 0. \tag{1.6.2}$$

Quindi risulta

$$\bar{y}' = C_1z_1' + C_2z_2'$$

da cui

$$\bar{y}'' = C_1'z_1' + C_2'z_2' + C_1z_1'' + C_2z_2'';$$

sostituendo nell'equazione completa $Ly = f$ si ottiene

$$(C_1'z_1' + C_2'z_2' + C_1z_1'' + C_2z_2'') + a(C_1z_1' + C_2z_2') + b(C_1z_1 + C_2z_2) = f$$

che si riscrive come

$$C_1(z_1'' + az_1' + bz_1) + C_2(z_2'' + az_2' + bz_2) + (C_1'z_1' + C_2'z_2') = f.$$

A questo punto, per ipotesi z_1 e z_2 soddisfano l'equazione omogenea quindi la precedente equazione si riduce a

$$C_1'z_1' + C_2'z_2' = f.$$

In definitiva siamo arrivati a scrivere il seguente sistema lineare di due equazioni nelle due funzioni incognite C_1', C_2'

$$\begin{cases} C_1' z_1 + C_2' z_2 = 0 \\ C_1' z_1' + C_2' z_2' = f. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema lineare corrisponde alla matrice Wronskiana. Ma sappiamo che z_1, z_2 sono soluzioni linearmente indipendenti se e soltanto se il Wronskiano (cioè il determinante della matrice Wronskiana) è diverso da zero per ogni $t \in I$. Pertanto dalla teoria dei sistemi lineari, il precedente sistema si può risolvere (per esempio col metodo di Cramer) ottenendo

$$C_1' = \frac{-z_2 f}{z_2' z_1 - z_2 z_1'} \qquad C_2' = \frac{z_1 f}{z_2' z_1 - z_2 z_1'}. \tag{1.6.3}$$

Si vede che il denominatore è proprio il Wronskiano. Quindi dalla regolarità di f, z_1 e z_2 si ha che C_1', C_2' sono funzioni continue e pertanto, cercando una loro primitiva, si ottengono due funzioni di classe $\mathcal{C}^1(I)$ che inserite in (1.6.1) danno una soluzione particolare dell'equazione completa.

Se invece si inserisce in (1.6.1) la generica primitiva di C_1' e C_2' dipendente da costanti arbitrarie, si ottiene l'integrale generale dell'equazione completa, cioè

$$y(t) = (C_1(t) + k_1)z_1(t) + (C_2(t) + k_2)z_2(t) = \bar{y} + k_1 z_1(t) + k_2 z_2(t)$$

al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

✎ **Esempio 1.6.1.** *Ricavare una soluzione particolare dell'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti*

$$y'' + 4y = t^2$$

col metodo di variazione delle costanti.

Come vedremo in esercizi successivi, l'integrale generale dell'equazione omogenea risulta

$$z(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

essendo $z_1(t) = \cos 2t$ e $z_2(t) = \sin 2t$ soluzioni indipendenti.

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = C_1(t) \cos 2t + C_2(t) \sin 2t. \tag{1.6.4}$$

Applicando la formula (1.6.3) con $f(t) = t^2$, $z_1(t) = \cos 2t$ e $z_2(t) = \sin 2t$ si ottiene

$$C_1'(t) = -\frac{1}{2} t^2 \sin 2t \qquad C_2'(t) = \frac{1}{2} t^2 \cos 2t.$$

Integrando due volte per parti le precedenti relazioni si ottiene

$$C_1(t) = \frac{1}{4}t^2\cos 2t - \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 2t \qquad C_2(t) = \frac{1}{4}t^2\sin 2t + \frac{1}{4}t\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

A questo punto, inserendo le relazioni trovate in (1.6.4) si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \left(\frac{1}{4}t^2\cos 2t - \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{8}\cos 2t\right)\cos 2t + \left(\frac{1}{4}t^2\sin 2t + \frac{1}{4}t\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t\right)\sin 2t \\ &= \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

1.7. Esercizi di riepilogo

✍ **Esercizio 1.7.1.**

Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 6y' + 9y = 3t + 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.

Iniziamo a lavorare con l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

che dà come soluzioni $r = 3$ con doppia molteplicità. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata. Per il metodo di somiglianza, la cerchiamo nella forma $\overline{y}(t) = At + B$. Quindi $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Inserendo questi dati nell'equazione di partenza si ottiene dunque

$$0 - 6A + 9(At + B) = 3t + 2$$

da cui si deduce (uguagliando tra loro i coefficienti del termine di primo grado e uguagliando tra loro i termini noti)

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{4}{9}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea di partenza è:

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t} + \frac{1}{3}\, t + \frac{4}{9},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto imponiamo i dati di Cauchy per risolvere il problema associato. Prima di tutto si ha

$$-1 = y(0) = c_1 + \frac{4}{9}; \tag{1.7.1}$$

in secondo luogo, ricordando che

$$y'(t) = 3\, c_1\, e^{3t} + 3\, c_2\, t\, e^{3t} + c_2\, e^{3t} + \frac{1}{3}$$

si ha

$$2 = y'(0) = 3c_1 + c_2 + \frac{1}{3}. \tag{1.7.2}$$

A questo punto si deve risolvere il sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti costituito da (1.7.1)–(1.7.2). Ricavando c_1 dalla (1.7.1) e inserendo il risultato nella (1.7.2), si ottiene con semplici calcoli

$$c_1 = -\frac{13}{9}, \qquad c_2 = 2 - \frac{1}{3} - 3c_1 = \frac{5}{3} + \frac{13}{3} = 6.$$

Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy proposto è:

$$y(t) = -\frac{13}{9} e^{3t} + 6\, t\, e^{3t} + \frac{1}{3} t + \frac{4}{9}.$$

✍ **Esercizio 1.7.2.**

Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.

Iniziamo a lavorare con l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

che dà come soluzioni $r = 2$ con doppia molteplicità. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata attraverso il metodo di somiglianza. Siccome il termine forzante e^{2t} è esattamente una soluzione dell'equazione omogenea, non possiamo semplicemente cercare una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = C\, e^{2t}$; per lo stesso motivo, non è sufficiente cercare una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = C\, t\, e^{2t}$. Quindi sarà necessario cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = C\, t^2\, e^{2t}.$$

Dobbiamo ora derivare l'espressione di $\bar{y}$ e inserire le espressioni $\bar{y}'(t)$ e $\bar{y}''(t)$ nell'equazione differenziale di partenza. Si ha

$$\bar{y}'(t) = C\,(2t + 2t^2)\, e^{2t} \qquad \bar{y}''(t) = C\,(2 + 4t + 4t + 4t^2)e^{2t}$$

quindi inserendo tali informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$C\,(2 + 8t + 4t^2)e^{2t} - 4\, C\,(2t + 2t^2)\, e^{2t} + 4\, C\, t^2\, e^{2t} = e^{2t}.$$

A questo punto, il termine e^{2t} che compare in entrambi i termini si può semplificare; rimane un'uguaglianza di polinomi (in t). I termini in t^2 si semplificando, allo stesso modo i termini in t si elidono; rimangono i termini costanti che danno

$$2C = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{1}{2}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2} t^2\, e^{2t}.$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta dunque

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t} + \frac{1}{2} t^2\, e^{2t}.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene:

$$1 = y(0) = c_1$$

mentre per imporre il dato $y'(0) = 0$ occorre prima derivare in t l'espressione dell'integrale generale. Si ha

$$y'(t) = 2c_1\, e^{2t} + 2\, c_2\, t\, e^{2t} + c_2\, e^{2t} + t\, e^{2t} + t^2\, e^{2t}$$

da cui

$$0 = y'(0) = 2c_1 + c_2.$$

Da queste equazioni si ottiene

$$c_1 = 1 \qquad c_2 = -2.$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è dunque

$$y(t) = \left(1 - 2t + \frac{1}{2}t^2\right) e^{2t}.$$

✍ **Esercizio 1.7.3.**

Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.

Iniziamo a lavorare con l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 + 4 = 0$$

che non è risolubile in $\mathbb{R}$ ma che invece ha due soluzioni complesse coniugate $r = \pm 2i$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata attraverso il metodo di somiglianza. Siccome il termine forzante $\cos t$ è una funzione trigonometrica, allora si va a cercare una soluzione particolare nella forma più generale possibile $\bar{y}(t) = a\cos t + b\sin t$.

Dobbiamo ora derivare l'espressione di $\bar{y}$ e inserire l'espressione di $\bar{y}''(t)$ nell'equazione differenziale di partenza. Si ha

$$\bar{y}'(t) = -a\sin t + b\cos t \qquad \bar{y}''(t) = -a\cos t - b\sin t$$

quindi inserendo tali informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$-a\cos t - b\sin t + 4(a\cos t + b\sin t) = \cos t.$$

A questo punto, uguagliando i termini in $\sin t$ e $\cos t$, si ottengono le seguenti relazioni per a e b

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = 0.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{3}\cos t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta dunque

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\cos t.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene:

$$0 = y(0) = c_1 + \frac{1}{3}$$

mentre per imporre il dato $y'(0) = 1$ occorre prima derivare in t l'espressione dell'integrale generale. Si ha

$$y'(t) = 2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \frac{1}{3}\sin t$$

da cui

$$1 = y'(0) = 2c_2.$$

Da queste equazioni si ottiene

$$c_1 = -\frac{1}{3} \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è dunque

$$y(t) = -\frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\cos t.$$

✍ **Esercizio 1.7.4.**

Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-t}\cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.
L'equazione omogenea è la stessa dell'esercizio precedente, dunque si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1\,\cos 2t + c_2\,\sin 2t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata attraverso il metodo di somiglianza. Siccome il termine forzante $e^{-t}\cos t$ è il prodotto di una funzione esponenziale per una funzione trigonometrica, allora si va a cercare una soluzione particolare nella forma più generale possibile del tipo

$$\bar{y}(t) = ae^{-t}\cos t + be^{-t}\sin t.$$

Dobbiamo ora derivare l'espressione di $\bar{y}$ e inserire l'espressione di $\bar{y}''(t)$ nell'equazione differenziale di partenza. Si ha

$$\bar{y}'(t) = (-a\cos t - a\sin t - b\sin t + b\cos t)e^{-t} = ((b-a)\cos t - (a+b)\sin t)e^{-t}$$

da cui

$$\bar{y}''(t) = (-(b-a)\sin t - (a+b)\cos t - (b-a)\cos t + (a+b)\sin t)e^{-t} = (2a\sin t - 2b\cos t)e^{-t}$$

quindi inserendo tali informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$(2a\sin t - 2b\cos t)e^{-t} + 4(a\cos t + b\sin t)e^{-t} = e^{-t}\cos t.$$

A questo punto, uguagliando i termini in $\sin t$ e $\cos t$, si ottengono le seguenti relazioni per a e b

$$a = \frac{1}{5} \qquad b = -\frac{1}{10}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta dunque

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene:

$$0 = y(0) = c_1 + \frac{1}{5}$$

mentre per imporre il dato $y'(0) = 1/10$ occorre prima derivare in t l'espressione dell'integrale generale. Si ha

$$y'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{5}e^{-t}\sin t + \frac{1}{10}e^{-t}\sin t - \frac{1}{10}e^{-t}\cos t$$

da cui

$$\frac{1}{10} = y'(0) = 2c_2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}.$$

Da queste equazioni si ottiene

$$c_1 = -\frac{1}{5} \qquad c_2 = \frac{1}{5}.$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è dunque

$$y(t) = -\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

✍ **Esercizio 1.7.5.**

(Uso dell'esponenziale complesso)
Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-t}\cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.
Iniziamo a lavorare con l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 + 4 = 0$$

che non è risolubile in $\mathbb{R}$ ma che invece in $\mathbb{C}$ ha due soluzioni complesse coniugate $r = \pm 2i$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata attraverso il metodo di somiglianza.
Osserviamo che

$$\Re(e^{(-1+i)t}) = \Re(e^{-t}(\cos t + i \sin t)) = e^{-t} \cos t$$

quindi la forzante nel problema di Cauchy proposto è proprio la parte reale dell'esponenziale complesso $e^{(-1+i)t}$. Questo suggerisce la seguente idea: trovare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = e^{(-1+i)t} \tag{1.7.3}$$

dove il termine esponenziale complesso sostituisce la forzante $e^{-t} \cos t$. Una volta trovata la soluzione di questa equazione, per linearità, prendendone la parte reale si troverà una soluzione particolare dell'equazione data.
Sia dunque da trovare una soluzione particolare di (1.7.3); la cerchiamo nella forma

$$\tilde{y}(t) = A\, e^{(-1+i)t}.$$

Quindi andando a derivare si ottiene

$$\tilde{y}'(t) = A(-1+i)\, e^{(-1+i)t} \qquad \tilde{y}''(t) = A(-1+i)^2\, e^{(-1+i)t}.$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione differenziale si ottiene

$$A[(-1+i)^2 + 4]\, e^{(-1+i)t} = e^{(-1+i)t}$$

da cui, visto che $(-1+i)^2 = -2i$, si ha

$$A(4-2i) = 1 \qquad A = \frac{1}{4-2i} = \frac{4+2i}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i.$$

A questo punto una soluzione particolare della (1.7.3) risulta

$$\tilde{y}(t) = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) e^{-t} (\cos t + i \sin t)$$

per cui, per linearità, prendendo la parte reale della precedente soluzione otterrò una soluzione particolare dell'equazione di partenza, cioè

$$\bar{y}(t) = \Re\tilde{y}(t) = \frac{1}{5}e^{-t} \cos t - \frac{1}{10}e^{-t} \sin t.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa risulta dunque

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene:

$$0 = y(0) = c_1 + \frac{1}{5}$$

mentre per imporre il dato $y'(0) = 1/10$ occorre prima derivare in t l'espressione dell'integrale generale. Si ha

$$y'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{5}e^{-t}\sin t + \frac{1}{10}e^{-t}\sin t - \frac{1}{10}e^{-t}\cos t$$

da cui

$$\frac{1}{10} = y'(0) = 2c_2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}.$$

Da queste equazioni si ottiene

$$c_1 = -\frac{1}{5} \qquad c_2 = \frac{1}{5}.$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è dunque

$$y(t) = -\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$$

✍ **Esercizio 1.7.6.**

(Principio di sovrapposizione degli effetti)
Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = t^2 + e^{-t} \\ y(0) = \dfrac{1}{5} \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'equazione omogenea è la stessa dell'esercizio precedente, dunque si ha che la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea associata attraverso il metodo di somiglianza.
PRIMO MODO: siccome la forzante è data dalla somma di un'esponenziale e un polinomio, una soluzione particolare dell'equazione completa può essere cercata nella seguente forma

$$\bar{y}(t) = a + bt + ct^2 + \alpha e^{-t}.$$

Andando a derivare si ottiene

$$\bar{y}'(t) = b + 2ct - \alpha e^{-t} \qquad \bar{y}''(t) = 2c + \alpha\, e^{-t}$$

quindi andando a inserire queste informazioni nell'equazione differenziale si ottiene

$$2c + \alpha e^{-t} + 4a + 4bt + 4ct^2 + 4\alpha e^{-t} = t^2 + e^{-t}$$

da cui

$$\begin{cases} 2c + 4a = 0 \\ 4b = 0 \\ 4c = 1 \\ 5\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{1}{4} \\ \alpha = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa risulta

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{5}e^{-t}$$

mentre l'integrale generale dell'equazione completa risulta

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{5}e^{-t}.$$

SECONDO MODO: siccome la parte polinomiale e la parte esponenziale della forzante sono indipendenti, una soluzione particolare dell'equazione completa la si può trovare anche come somma di due soluzioni particolari rispettivamente delle seguenti equazioni differenziali

$$y'' + 4y = t^2 \qquad y'' + 4y = e^{-t}.$$

Sia $\bar{y}_1(t)$ una soluzione particolare dell'equazione differenziale $y'' + 4y = t^2$. Allora, non essendoci problemi di risonanza, la cercherò nella forma $\bar{y}_1(t) = a + bt + ct^2$ da cui $\bar{y}'(t) = b + 2ct$ e

$\bar{y}''(t) = 2c$ quindi, inserendo queste informazioni nell'equazione differenziale si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2c + 4a = 0 \\ 4b = 0 \\ 4c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

D'altra parte, sia $\bar{y}_2(t)$ una soluzione particolare dell'equazione differenziale $y'' + 4y = e^{-t}$. Di nuovo, non essendoci problemi di risonanza, la cercherò nella forma $\bar{y}_2(t) = \alpha\, e^{-t}$ da cui $\bar{y}'(t) = -\alpha e^{-t}$ e $\bar{y}''(t) = \alpha\, e^{-t}$ quindi, inserendo le informazioni nell'equazione differenziale, si ha

$$\alpha\, e^{-t} + 4\alpha e^{-t} = e^{-t}$$

da cui $\alpha = 1/5$. Riassumendo dunque una soluzione particolare dell'equazione completa risulta essere esattamente come prima

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{5}e^{-t}.$$

Concludiamo l'esercizio imponendo i dati di Cauchy. Si ha prima di tutto

$$y'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}e^{-t}$$

da cui

$$\frac{1}{5} = y(0) = c_1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{5}$$

e

$$0 = y'(0) = 2c_2 - \frac{1}{5}.$$

Da queste ultime due equazioni si deduce che

$$c_1 = \frac{1}{8} \qquad c_2 = \frac{1}{10}.$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy proposto risulta essere

$$y(t) = \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{5}e^{-t}$$

e risulta essere definita su tutto l'asse reale.

✍ **Esercizio 1.7.7.**

Si determinino le soluzioni 2π-periodiche della seguente equazione differenziale

$$y'' + \beta^2 y = \sin t$$

al variare di $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.
Risolviamo dapprima l'equazione omogenea. Si tratta di risolvere $z'' + \beta^2 z = 0$; l'equazione caratteristica associata risulta $r^2 + \beta^2 = 0$, le cui soluzioni sono $r = \pm\beta i$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è dunque:

$$z(t) = c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t.$$

A questo punto distinguiamo due casi:
PRIMO CASO: se $\beta \neq \pm 1$ allora cerchiamo una soluzione particolare nella forma $\bar{y}(t) = a\sin t + b\cos t$. Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(t) = a\cos t - b\sin t \qquad \bar{y}''(t) = -a\sin t - b\sin t$$

quindi inserendo queste informazioni nell'equazione data si ha

$$-a\sin t - b\sin t + \beta^2 a\sin t + \beta^2 b\cos t = \sin t.$$

Allora si deve avere

$$a = \frac{1}{\beta^2 - 1} \qquad b = 0;$$

quindi una soluzione particolare dell'equazione completa risulta

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\beta^2 - 1}\sin t$$

mentre l'integrale generale dell'equazione completa risulta

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t + \frac{1}{\beta^2 - 1}\sin t. \tag{1.7.4}$$

A questo punto dobbiamo valutare per quali valori di β la (1.7.4) è una funzione $2\pi-$periodica. Questo chiaramente è vero se $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$; se invece $\beta \notin \mathbb{Z}$, deve necessariamente essere

$c_1 = c_2 = 0$.
SECONDO CASO: se invece $\beta = \pm 1$, allora visto che la forzante è esattamente una delle soluzioni dell'omogenea (c'è risonanza) una soluzione particolare dell'equazione completa deve essere cercata nella forma

$$\bar{y}(t) = a\,t\cos t + b\,t\sin t.$$

Derivando si ottiene

$$\bar{y}'(t) = a\,\cos t - a\,t\,\sin t + b\sin t + bt\cos t \quad \bar{y}''(t) = -a\sin t - a\sin t - a\,t\cos t + b\cos t + b\cos t - b\,t\sin t$$

da cui, inserendo le informazioni nell'equazione differenziale (ricordiamo che essendo $\beta = \pm 1$ si ha $\beta^2 = 1$) si ottiene

$$-2a\sin t + 2b\cos t = \sin t$$

e quindi

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = 0.$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa risulta

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2}t\cos t$$

quindi l'integrale generale dell'equazione completa risulta

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = c_1\,\cos\beta t + c_2\,\sin\beta t - \frac{1}{2}t\cos t.$$

e queste non sono mai funzioni $2\pi-$periodiche (per la presenza nell'ultimo termine del fattore t).

✍ **Esercizio 1.7.8.**

Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y' = t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del terzo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. Anche in questo caso si dimostra che l'integrale generale dell'equazione completa si trova sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.

Risolviamo dapprima l'equazione omogenea.
PRIMO MODO: passiamo attraverso l'equazione caratteristica associata, che è di terzo grado $r^3 + r = 0$, da cui si vede immediatamente che le soluzioni sono $r = 0$ e $r = \pm i$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea risulta

$$z(t) = a_1 + a_2 \sin t + a_3 \cos t.$$

SECONDO MODO: facciamo un cambio di variabile ponendo $v = z'$. In questo modo l'equazione di terzo grado si trasforma in un'equazione di secondo grado $v'' + v = 0$ che ha come soluzione $v(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A questo punto, tornando alla variabile z, bisogna risolvere l'equazione differenziale

$$z' = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

e questo equivale a trovare le primitive della funzione $c_1 \cos t + c_2 \sin t$ cioè

$$z(t) = \int (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, dt + C = c_1 \sin t - c_2 \cos t + C$$

e si ritrova la soluzione precedente (le costanti c_i, a_i, C sono numeri reali, quindi in entrambi i casi si ottiene la medesima soluzione; basta porre $a_1 = C$ $a_2 = c_1$ e $a_3 = -c_2$).
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di somiglianza. Si nota che non è sufficiente cercarla nella forma $\bar{y}(t) = a + bt$ in quanto derivando e inserendo le informazioni nell'equazione differenziale si otterrebbe $b = t$, che non è possibile essendo b un numero reale e non un polinomio. Allora si prova con un polinomio di grado superiore del tipo $\bar{y}(t) = at + bt^2$ (il termine noto lo possiamo omettere visto che già compare nell'equazione omogenea). Si ottiene

$$\bar{y}'(t) = a + 2bt \qquad \bar{y}''(t) = 2b \qquad \bar{y}'''(t) = 0$$

da cui, inserendo le informazioni nell'equazione si ha

$$a + 2bt = t \;\Rightarrow\; a = 0,\; b = \frac{1}{2}.$$

Quindi un'equazione particolare dell'equazione completa proposta risulta

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2}t^2$$

e l'integrale generale dell'equazione proposta risulta

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) = a_1 + a_2 \sin t + a_3 \cos t + \frac{1}{2}t^2.$$

Imponiamo ora i dati di Cauchy. Si nota che l'integrale generale di un'equazione di terzo grado contiene 3 costanti arbitrarie e per determinare un'unica soluzione bisogna imporre 3 condizioni iniziali. Questo è un fatto generale: l'integrale generale di un'equazione di grado n è definito a meno di n costanti arbitrarie e per determinare un'unica soluzione bisogna imporre n condizioni (iniziali o al contorno). Nello specifico si ha

$$y'(t) = a_2 \cos t - a_3 \sin t + t \qquad y''(t) = -a_2 \sin t - a_3 \cos t + 1$$

quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) = a_1 + a_3 \\ 1 = y'(0) = a_2 \\ 0 = y''(0) = -a_3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Concludendo la soluzione del precedente problema di Cauchy risulta

$$y(t) = -1 + \sin t + \cos t + \frac{1}{2}t^2$$

che risulta definita su tutta $\mathbb{R}$.