B Se $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ e $Y \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ sono due variabili aleatorie indipendenti, allora si ha che:

A) $Var[2X+2Y] = \frac{35}{9}$; B) $Var[2X+2Y] = \frac{11}{3}$;

C) $Var[2X+2Y] = \frac{41}{9}$; D) $Var[3X+3Y] = 11$.

QUESTO TERMINE E' NULLO SSE X, Y INDIP.

PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA: $Var[aX+bY] = a^2 Var X + b^2 Var Y + 2ab\,Cov(X,Y)$

$Var X = np(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$Var Y = p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow Var[2X+2Y] = 2^2(Var X + Var Y) = 4\,\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{3} \Rightarrow B)$

A Se $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ sono due variabili aleatorie normali indipendenti, allora si ha che:

A) $Var[2X+Y] = 4\sigma_1^2 + \sigma_2^2$; B) $E(XY) = \mu_1 + \mu_2$;

C) $\frac{X+Y-(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \sim \mathcal{N}(0,1)$; D) $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, (\sigma_1+\sigma_2)^2)$.

A) VERA (VEDI DOMANDA PRECEDENTE)

B) DA $Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$ (ESSENDO X,Y INDIP. E QUINDI $Cov(X,Y)=0$)
RICAVO $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y = \mu_1 \cdot \mu_2$ E NON $\mu_1 + \mu_2$ $\Rightarrow$ FALSA

C) FALSA: IL DENOMINATORE DOVREBBE ESSERE $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

D) FALSA: $Var[X+Y] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ E NON $(\sigma_1+\sigma_2)^2$

Siano X e Y due v.a. discrete, per cui

$$P(X = 1, Y = 3) = P(X = 1)P(Y = 3),$$

dove 1 è uno dei valori possibili per X e 3 per Y. Allora X e Y sono indipendenti.

A) sempre vero;

B) sempre falso;

C) vero se X e Y assumono solo 2 valori;

D) vero se almeno una fra X e Y assume solo 1 valore.

IN GENERALE DUE V.A. DISCRETE SONO INDIPENDENTI QUANDO OGNI EVENTO CONGIUNTO È IL PRODOTTO DELLE RISPETTIVE MARGINALI:

$$\mathbb{P}[X = x_i \cap Y = y_j] = \mathbb{P}[X = x_i] \cdot \mathbb{P}[Y = y_j]$$

DOVE x_i E y_j SONO I VALORI POSSIBILI PER X E PER Y.

QUINDI, IN GENERALE, NON BASTA VERIFICARE LA CONDIZIONE PER UNA SOLA COPPIA i, j PER AVERE GARANTITA L'INDIPENDENZA. $\Rightarrow$ A) È FALSA

D'ALTRO CANTO RICORDIAMO CHE SE A E B SONO INDIPENDENTI, LO SONO ANCHE LE COPPIE A^c, B $\quad A, B^c$ E A^c, B^c.

ORA, SE UNA V.A. PUÒ ASSUMERE ESCLUSIVAMENTE DUE VALORI x_1 E x_2 SIGNIFICA CHE $\{X = x_1\} = \{X = x_2\}^c$. QUINDI, SE X E Y ASSUMONO SOLO DUE VALORI, VERIFICARE LA CONDIZIONE DI INDIP. PER UNA DELLE QUATTRO COPPIE GARANTISCE CHE VALGA PER TUTTE

$\Rightarrow$ C) VERA E B) FALSA.

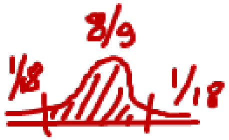
INFINE: SE X È COSTANTE È INDIPENDENTE DA QUALSIASI Y $\Rightarrow$ D) VERA.

C Se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, quanto vale $P(X \leq 3)$?

A) circa 0; B) circa 3; C) circa 1; D) circa 0.5.

DALLA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSCEV SI RICAVA CHE:

$\mathbb{P}[|X-\mu|<3\sigma] \geq \frac{8}{9}$



DA CUI, PER $\mu=0$ E $\sigma=1$: $\mathbb{P}[X\leq 3] > \frac{17}{18}$

$\Rightarrow$ C) VERA

INOLTRE A) FALSA $\mathbb{P}[X\leq k] \to 0$ SOLO PER $k \to -\infty$ B) FALSA! D) FALSA: $\mathbb{P}[X\leq 0]=\frac{1}{2}$

D Siano X e Y due variabili aleatorie normali indipendenti, $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(b,\kappa^2)$ Che legge ha $X-Y$?

A) $\mathcal{N}(a+b,\sigma^2+\kappa^2)$; B) $\mathcal{N}(a-b,\sigma^2-\kappa^2)$;

C) $\mathcal{N}(a-b,(\sigma-\kappa)^2)$; D) $\mathcal{N}(a-b,\sigma^2+\kappa^2)$.

$\mathbb{E}[X-Y]=a-b$

$\mathbb{V}ar[X-Y]=\sigma^2+\kappa^2$ $\Rightarrow$ D)

C Siano $X \sim \mathcal{N}(1,1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(2,2)$. Quale delle seguenti affermazioni vale sempre?

A) se X e Y sono indipendenti allora $X-Y \sim \mathcal{N}(-1,-1)$; B) $X-Y \sim \mathcal{N}(-1,3)$;

C) se X e Y sono indipendenti allora $X-Y \sim \mathcal{N}(-1,3)$; D) $X-Y \sim \mathcal{N}(-1,-1)$.

$\mathbb{E}[X-Y] = 1-2=-1$ $\mathbb{V}ar[X-Y]=\mathbb{V}ar X+\mathbb{V}ar Y+2Cov[X,Y]$

DUNQUE SE X,Y IND. $\Rightarrow$ $\mathbb{V}ar[X-Y]=1+2=3$ ALTRIMENTI $\mathbb{V}ar[X-Y]=?$

QUINDI C) VERA

A Quanto vale $\Phi(0)$ (Φ è la funzione di distribuzione della normale standard)?

A) $1/2$; B) $1/\sqrt{2\pi}$; C) 0; D) 1.

$\frac{1}{2} = \phi(0)$ $0 = \phi(-\infty)$ $1 = \phi(+\infty)$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(0) \Rightarrow$ A) VERA

C Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e aventi entrambe varianza pari a σ^2. Quale delle seguenti variabili ha varianza pari a 1?

A) $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$; B) $\frac{X+Y}{2}$; C) $\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}$; D) $\frac{X+Y}{2\sigma}$.

O CALCOLIAMO LE QUATTRO VARIANZE E VEDIAMO QUALE VALE 1 OPPURE OSSERVIAMO CHE $\mathrm{Var}[X \pm Y] = 2\sigma^2$ INOLTRE RICORDIAMO CHE PER AVERE VARIANZA UNITARIA LA V.A. VA DIVISA PER LA SUA DEV. STANDARD. NEL NOSTRO CASO ESSA VALE $\sqrt{2}\sigma$ DUNQUE, DELLE QUATTRO RISPOSTE, QUELLA BUONA È $\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}$ CIOÈ LA C)

Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite con valore atteso μ e varianza σ^2. Per n grande si ha:

A) $\overline{X}_n - \frac{\sigma^2}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, 0)$

B) $\overline{X}_n - \frac{\sigma^2}{n} \sim \mathcal{N}(\mu - \frac{\sigma^2}{n}, 0)$

C) $\overline{X}_n - \frac{\sigma^2}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

D) $\overline{X}_n - \frac{\sigma^2}{n} \sim \mathcal{N}(\mu - \frac{\sigma^2}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{\sigma^2}{n}$ È UN NUMERO. POICHÈ $\mathbb{E}[\overline{X}_n + \frac{\sigma^2}{n}] = \mathbb{E}\overline{X}_n + \frac{\sigma^2}{n} = \mu + \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow$ A) FALSA
C) FALSA

INOLTRE $\mathbb{V}ar[\overline{X}_n + \frac{\sigma^2}{n}] = \mathbb{V}ar\,\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow$ B) FALSA E D) VERA

C Sia X una variabile aleatoria gaussiana: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
La probabilità $P(X < \mu + \sigma)$:

A) dipende solo da σ

B) dipende solo da μ

C) non dipende nè da σ nè da μ

D) dipende sia da μ che da σ

Sia $\{X_i\}_{i \geq 1}$ una successione di v.a.
Quali di queste ipotesi sono necessarie per il teorema del limite centrale?

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

A) le X_i sono v.a. Normali;

B) le X_i sono v.a. indipendenti;

C) le X_i sono v.a. di Bernoulli;

D) le X_i sono v.a. con la stessa legge;

E) le X_i hanno valore atteso finito;

F) le X_i hanno varianza finita;

G) le X_i hanno varianza positiva.

Sia X una v.a. con valore atteso 3 e varianza 16. Quali di queste affermazioni sono sempre vere?

NO A) $P(4 - 2 \cdot 3 < X < 4 + 2 \cdot 3) \geq 0.75$;

$k=2$ B) $P(3 - 2 \cdot 4 < X < 3 + 2 \cdot 4) \geq 0.75$; $\leftarrow$

$k=5$ C) $P(X \leq 3 - 5 \cdot 4) + P(X \geq 3 + 5 \cdot 4) \leq 0.25$;

NO D) $P(X \leq 4 - 5 \cdot 3) + P(X \geq 4 + 5 \cdot 3) \leq 0.04$.

$$\mathbb{P}\left[|X-\mu| > k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \mathbb{P}\left[3 - k\sigma \leq X \leq 3 + k\sigma\right] \leq \frac{}{k^2}$$

$$\mathbb{P}\left[|X-3| > k4\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \mathbb{P}\left[3 - k4 \leq X \leq 3 + k4\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

Omaggio della ditta