variabile di Bernoulli MISURA L'ESITO DI UN TEST BINARIO

$X \sim B(p) \quad p_X(1) = p \quad p_X(0) = 1 - p.$

$\mathbb{E}X = p$

$\mathrm{Var}\,X = p(1-p)$

---

binomiale CONTA I SUCCESSI IN n TEST BINARI

$X \sim B(n,p) \quad p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$

$\mathbb{E}X = np \quad \mathrm{Var}\,X = np(1-p)$

---

geometrica CONTA I TEST PER OTTENERE IL PRIMO SUCCESSO

$X \sim \mathrm{Geo}(p) \quad p_X(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k \quad \mathbb{E}X = \frac{1}{p} \quad \mathrm{Var}\,X = \frac{1-p}{p^2}$

Poisson

CONTA I SUCCESSI IN UN INTERVALLO CONTINUO (AD ES. TEMPO)

$X \sim P(\lambda) \quad \mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} & i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \mathbb{E}X = \lambda \quad \mathrm{Var}\,X = \lambda$

---

esponenziale

MISURA L'INTERVALLO CONTINUO NECESSARIO AL VERIFICARSI DEL PRIMO SUCCESSO

$Y \sim \mathrm{Esp}(\nu) \quad f_Y(t) = \nu e^{-\nu t} \quad \text{per } t > 0$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = 1 - \mathbb{P}(Y > t) = 1 - e^{-\nu t} \quad \text{per } t > 0.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\nu} \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\nu^2}$$

assenza di memoria: $\mathbb{P}(Y > T + t | Y > T) = \mathbb{P}(Y > t)$

Densità gaussiana (o normale)

normale standard $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \qquad F_X(t) \equiv \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2/2} dt = 0 \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1$$

gaussiana (o **normale**) $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y = \sigma X + \mu \quad$ con $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad F_X(t) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \mathbb{E}(X) + \mu = \mu$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Quantili

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad q_{1-\alpha} = -q_\alpha,\ \forall \alpha \in (0,1). \qquad \mathbb{P}(|X| < q_{\frac{1+\alpha}{2}}) = \alpha$$

$$\Phi(-q_\alpha) = 1 - \Phi(q_\alpha) = 1 - \alpha \qquad \mathbb{P}(|X| > q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

se $Y = \sigma X + \mu$ dove $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ allora $\alpha = \mathbb{P}(Y \leq Q_Y(\alpha)) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{Q_Y(\alpha) - \mu}{\sigma}\right)$

Teorema Centrale del Limite

media campionaria

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

media campionaria standardizzata

$$H_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$H_n^* \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad n \geq 30$$

$$\overline{X}_n \approx Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad H_n = X_1 + \cdots + X_n \approx Z \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \leq t) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t-\mu)}{\sigma}\right) \qquad \mathbb{P}(H_n \leq t) \approx \Phi\left(\frac{t - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

Correzione di continuità $\quad \mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X < k + 0.5) \simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(k + 0.5 - \mu)}{\sigma}\right)$

Approssimazioni gaussiane

Osservazione 9.1.3. Supponiamo che $X_1, \dots, X_n$ sia una successione di variabili i.i.d. provenienti tutte da una legge che ammette media μ e varianza σ, allora, detto $\overline{X}_n := H_n/n$ dove $H_n := \sum_{i=1}^n X_i$, si ha

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \frac{H_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$H_n \approx Y \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$
$$\overline{X}_n \approx Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

- *Approssimazione normale di una Binomiale.* Siano $X_i \sim B(p)$ n v.a. Bernoulliane i.i.d., e sia $H_n = X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$. La media di una variabile di Bernoulli è $\mu = p$ e la sua varianza $\sigma^2 = p(1-p)$.

  Dal Teorema Centrale del Limite possiamo affermare che, per n grande,

  $$H_n \approx Y \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) = \mathcal{N}(np, np(1-p)),$$
  $$\overline{X}_n \approx Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n) = \mathcal{N}(p, p(1-p)/n),$$

  $np > 5,\ n(1-p) > 5$

  $$\mathbb{P}(H_n \le t) \approx \Phi\left(\frac{t - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad \text{senza correzione di continuità}$$

  $$.\mathbb{P}(H_n \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad \text{con correzione di continuità, } k \in \mathbb{N}$$

- *Approssimazione normale di una Poisson.* Poichè se $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. distribuite come $P(1)$ implica $H_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n)$ si mostra in generale che una buona approssimazione per una variabile di Poisson $X \sim P(\lambda)$ con $\lambda \ge 5$ (λ non necessariamente intero) è rappresentata da $Y \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$. Quindi

  $$\mathbb{P}(X \le t) \approx \Phi\left(\frac{t - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad \text{senza correzione di continuità}$$

  $$.\mathbb{P}(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \qquad \text{con correzione di continuità, } k \in \mathbb{N}.$$

9.2.1 Disuguaglianza di Chebychev

Proposizione 9.2.1. *Sia X una v.a. con valore atteso μ e varianza σ^2. Sia δ un numero reale positivo prefissato. Vale la seguente disuguaglianza:*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \ge \delta) \le \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Legge debole dei grandi numeri

Teorema 9.2.2. *Siano $X_1, X_2, \dots$ v.a. indipendenti identicamente distribuite con media finita μ. Allora per ogni $\epsilon > 0$ vale*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

Questo fatto si esprime dicendo che la successione di v.a. $\{\overline{X}_n\}$ tende in probabilità a μ per $n \to \infty$.

Legge forte dei grandi numeri

Teorema 9.2.4. *Siano $X_1, X_2, \dots$ v.a. indipendenti identicamente distribuite con media finita μ. Allora*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\}\right) = 1.$$

3.7 Affidabilità

Supponiamo di avere un sistema costituito da vari sottositsemi in serie o in parallelo. Si consideri una caratteristica Z che ciascun sottosistema può avere o non avere (ad esempio, X potrebbe essere "il sistema ha durata superiore ad un tempo T"). La probabilità che il sistema (o il sottosistema) abbia la caratteristica Z si chiama **affidabilità**.

Supponiamo che vi siano n sottosistemi e che l'i-esimo sottosistema abbia quindi affidabilità a_i. Supponiamo inoltre che gli eventi $\{$"l'elemento i-esimo ha la caratteristica Z"$\}_{i=1}^n$ siano indipendenti. Si considerino i due sistemi P ed S ottenuti mettendo gli n sottosistemi in parallelo e in serie rispettivamente.

Quando gli elementi sono messi in serie si suppone che il sistema S abbia la caratteristica Z se e solo se tutti i sottosistemi ce l'hanno. Pertanto l'affidabilità a_S di S si calcola come

$$a_S = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Viceversa quando gli elementi sono messi in parallelo si suppone che il sistema P abbia la caratteristica Z se e solo se almeno un sottosistema ce l'ha. Pertanto l'affidabilità a_P di P si calcola passando attraverso gli eventi complementari $\{$"l'elemento i-esimo non ha la caratteristica Z"$\}_{i=1}^n$, ottenendo

$$a_P = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i).$$