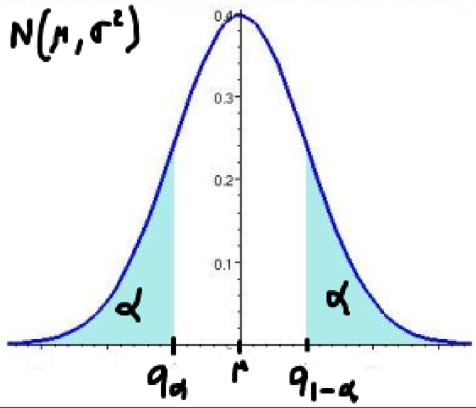
Esercizio 2 Supponiamo che in un giorno preso a caso a Milano la concentrazione di PM10 superi la soglia di 50 mg con una probabilità pari a 0.84135 e superi la soglia dei 150 mg con probabilità pari a 0.15865 (si supponga che la concentrazione di PM10 segua una legge normale).

1. Calcolare il valore atteso e la varianza della concentrazione giornaliera di PM10 a Milano. *Suggerimento: si noti che* $0.15865 + 0.84135 = 1$ *e si usi la simmetria della normale attorno alla media.*
2. Calcolare la probabilità di superare la soglia di 100 mg in un giorno fissato.
3. Calcolare la probabilità di superare la soglia di 50 mg per più di 35 giorni su 365.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathbb{P}[X > 50] = 0.84135$$

$$\mathbb{P}[X > 150] = 0.15865$$



IN GENERALE:

$$\mathbb{P}[X \le q_\alpha] = \alpha \Rightarrow \mathbb{P}[X > q_\alpha] = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}[X \le q_{1-\alpha}] = 1-\alpha \Rightarrow \mathbb{P}[X > q_{1-\alpha}] = \alpha$$

DA CUI $\mathbb{P}[X > q_\alpha] = \mathbb{P}[X \le q_{1-\alpha}]$

$$1-\alpha = 0.84135 \Rightarrow q_\alpha = 50 \qquad \alpha = 0.15865 \Rightarrow q_{1-\alpha} = 150$$

$$\frac{q_\alpha + q_{1-\alpha}}{2} = \mu \Rightarrow \mu = 100$$

$$1-\alpha = \mathbb{P}[X \le q_{1-\alpha}] = \mathbb{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{q_{1-\alpha}-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{q_{1-\alpha}-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\frac{q_{1-\alpha}-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(1-\alpha) \Rightarrow \sigma = \frac{q_{1-\alpha}-\mu}{\Phi^{-1}(1-\alpha)} = \frac{50}{\Phi^{-1}(0.84135)} = 50$$

(2) $\mathbb{P}[X > 100] = \mathbb{P}[X > \mu] = \frac{1}{2}$

(3) DOBBIAMO CALCOLARE $\mathbb{P}[H_{365} > 35]$ DOVE

$$H_{365} \sim B(365, p) \quad \text{CON} \quad p = \mathbb{P}[X > 50] = 1-\alpha = 0.84135$$

APPLICABILITÀ TLC $np \simeq 307{,}09275 > 5$ $\quad n(1-p) \simeq 57{,}90725$ OK!

$$\mathbb{P}[H_{365} > 35] = 1 - \mathbb{P}[H_{365} \le 35] \doteq 1 - \Phi\left(\frac{35+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq 1$$

Esercizio 1 Il numero medio di neuroni che si perdono sotto l'effetto dell'alcool in un secondo è 30. Supponiamo che la variabile che governa il numero di neuroni persi in un intervallo di tempo fissato abbia legge di Poisson.

1. Qual è la probabilità che in 1/6 di secondo si perdano più di 3 neuroni?
2. Qual è la probabilità che in 8 minuti si perdano almeno 15000 neuroni?

t TEMPO IN SECONDI

$X_t \sim P(\lambda_t)$

$\lambda_1 = 30 \qquad \lambda_t = 30t$

(1) $t = \frac{1}{6}$ E $\lambda_{1/6} = 5 \qquad \mathbb{P}[X_t > 3] = 1 - \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}[X_t = k] =$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_t^k}{k!} e^{-\lambda_t} = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6}\right) \simeq 0.735$$

(2) $t = 480$ E $\lambda_{480} = 14400 \gg 5 \Rightarrow \mathbb{P}[X_t \geq 15000] = 1 - \mathbb{P}[X_t < 15000] =$

$$= 1 - \mathbb{P}[X_t \leq 14999] = 1 - \phi\left(\frac{14999{,}5 - 14400}{\sqrt{14400}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{599{,}5}{120}\right) \approx 0$$

Esercizio 1

Una linea trasmette un segnale binario equivocandolo con probabilità $p = 0.01$. Si calcolino:

a) la probabilità che il primo errore si verifichi durante la trasmissione del quarto segnale
b) la probabilità che il primo errore si verifichi dopo il quarto segnale
c) il numero atteso di segnali trasmessi prima del primo errore

Si calcolino, inoltre, su 30 segnali trasmessi:

d) la probabilità che ci siano più di 2 errori
e) il numero medio di errori
f) la probabilità che il numero di errori superi il valore atteso di errori

$X_i \sim B(p)$ RILEVA L'ESITO DELLA i ESIMA TRASMISSIONE DI UN SEGNALE

$\{X_i = 1\} = \{\text{ERRATO}\}$

$X_n \sim B(n,p)$ CONTA IL NUMERO DI SEGNALI ERRATI SU n TRASMESSI

$T \sim G(p)$ CONTA IL NUMERO DI SEGNALI TRASMESSI PER AVERE UN ERRORE

a) $\mathbb{P}[T=4] = p(1-p)^3 = 0.01 \cdot (0.99)^3 \simeq 0.0097$

b) $\mathbb{P}[T>4] = 1 - \mathbb{P}[T \leq 4] = 1 - 1 + (1-p)^4 =$

$= (0.99)^4 \simeq 0.9606$

c) $\mathbb{E}[T-1] = \mathbb{E}T - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{0.99}{0.01} = 99$

d) $\mathbb{P}[X_{30} > 2] = 1 - \mathbb{P}[X_{30} \leq 2] = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} =$

$= 1 - \binom{30}{0}(0.01)^0(0.99)^{30} - \binom{30}{1}(0.01)^1(0.99)^{29} - \binom{30}{2}(0.01)^2(0.99)^{28} =$

$\simeq 0.0033$

e) $\mathbb{E}X_{30} = np = 0.3$

f) $\mathbb{P}[X_{30} > \mathbb{E}X_{30}] = \mathbb{P}[X_{30} > 0.3] = 1 - \mathbb{P}[X_{30} \leq 0.3] =$

$= 1 - \mathbb{P}[X_{30} = 0] = 1 - 0.99^{30} \simeq 0.2603$

Esercizio 5

Un broker di borsa possiede due telefonini, uno per le chiamate dall'Italia, uno per le chiamate dall'estero. Mediamente, su quello "italiano" arrivano 18 chiamate all'ora, su quello "estero" ne arrivano 5.

a) Calcolare la probabilità che in dieci minuti al cellulare "italiano" arrivino al massimo 3 chiamate;

b) calcolare la probabilità che in un quarto d'ora arrivino al cellulare estero due o più di due chiamate

$X \sim P(\lambda_I)$ CONTA LE CHIAMATE RICEVUTE SUL CELLULARE "ITA" IN 10 MINUTI

$Y \sim P(\lambda_E)$ CONTA LE CHIAMATE RICEVUTE SUL CELL. "EST" IN 15 MINUTI

$$\lambda_I = 18 \cdot \frac{10}{60} = 3 \qquad \lambda_E = 5 \frac{15}{60} = 1.25$$

a) $$\mathbb{P}[X \leq 3] = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_I^k}{k!} e^{-\lambda_I} =$$

$$= e^{-3} \sum_{k=0}^{3} \frac{3^k}{k!} = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right) = \frac{13}{e^3}$$

b) $$\mathbb{P}[Y \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 1] = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(1.25)^k}{k!} e^{-1.25} =$$

$$= 1 - e^{-1.25}\left(1 + 1.25\right) = 1 - \frac{2.25}{e^{1.25}}$$

Esercizio 1

Un assemblatore di computer acquista schede madri a blocchi di 100 pezzi.
La sua politica consiste nell'estrarre 10 volte un pezzo a caso tra 100, testarlo e reinserirlo nello scatolone ed accettare la partita solo se almeno 9 di essi risultano funzionanti.
Se l'intera partita contiene 20 pezzi difettosi qual è la probabilità che venga accettata?

SIA $p = \frac{20}{100} = 0.2$ LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE A CASO UN PEZZO DIFETTOSO (CON REIMMISSIONE)

SIA X LA V.A. CHE MISURA L'ESITO DEL TEST: $\{X=1\} = \{\text{PEZZO DIFETTOSO}\}$ E $\{X=0\} = \{\text{PEZZO OK}\}$

ALLORA $X \sim B(p)$ E LA V.A. CHE CONTA I PEZZI DIFETTOSI SU $n=10$ PEZZI TESTATI

È $X_n \sim B(n,p)$. SIA $k=9$ IL NUMERO MINIMO DI PEZZI SANI DA TROVARE.

SIA $A = \{\text{PARTITA ACCETTATA}\}$. ALLORA $A = \{X_n \leq n-k\}$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[X_n \leq n-k] = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$ DUNQUE

$$\mathbb{P}[X_{10} \leq 1] = \binom{10}{0}(0.2)^0(0.8)^{10} + \binom{10}{1}(0.2)^1(0.8)^9 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{10} + 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^9 = 0.8 \cdot 0.8^9 + 2 \cdot 0.8^9 = 2.8 \cdot 0.8^9 \simeq 0.3758$$