Limiti 1

1. Verificare con la definizione di limite:

1) $\lim_{x\to 3} \log_3 x = 1$ (R. $\delta = \min\{3^{1+\epsilon} - 3, 3 - 3^{1-\epsilon}\} = 3 - 3^{1-\epsilon}(*)$)

2) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^4 - 1} = +\infty$ (R. $K = \sqrt[4]{M^2+1}$ (*))

3) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\log x} = -\infty$ (R. $\delta = 1 - e^{-\frac{1}{M}}$ (*))

4) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-4}{x^2} = 0$ (R. $K = \dfrac{-1-\sqrt{1+16\epsilon}}{2\epsilon}$ (*))

(*) $\forall \epsilon > 0$, se $\delta = 3 - 3^{1-\epsilon}$ si ha che $|\log_3 x - 1| < \epsilon$ per ogni $x \in (3-\delta, 3+\delta)$

(*) $\forall M > 0$, se $K = \sqrt[4]{M^2+4}$ si ha che $\sqrt{x^4-1} > M$ per ogni $x > K$

(*) $\forall M > 0$, se $\delta = 1 - e^{-\frac{1}{M}}$ si ha che $\dfrac{1}{\log x} < -M$ per ogni $x \in (1-\delta, 1)$

(*) $\forall \epsilon > 0$, se $K = \dfrac{1+\sqrt{1+16\epsilon^2}}{2}$ si ha che $\left|\dfrac{x-4}{x^2}\right| < \epsilon$ per ogni $x < -K$;

N. B. $\left|\dfrac{x-4}{x^2}\right| = \dfrac{4-x}{x^2}$ per $x \to -\infty$

2. Calcolare i seguenti limiti (forme di indecisione di tipo $\dfrac{0}{0}$):

1) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ (R. 12)

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (R. 1)

3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ (R. n)

5) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (R. 3, si pone $t = \sqrt{x}$)

6) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (R. 1)

7) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2-3x}$ (R. $+\infty$)

3. Utilizzando i limiti notevoli, calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x^2}{2\sin x - 4x}$ (R. $-\dfrac{1}{2}$)

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x + \sqrt[3]{x}}$ (R. 0)

3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{(x-1)^9}$ (R. $+\infty$)

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x^2)}{1-\cos 2x}$ (R. $\dfrac{3}{2}$)

5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan^2 x}-1}{1-\cos x}$ (R. 2)

6) $\lim_{x\to +\infty} x^2(e^{\frac{2}{x}}-1)$ (R. $+\infty$)

7) $\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)$ (R. 6)

8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{(2x-2)^2}$ (R. $\dfrac{1}{4}$)

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$ (R. $\dfrac{1}{2}$)

10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(1+\cos x)$ (R. 1)

11) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$ (R. e^2)

12) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$ (R. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

13) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$ (R. -1)

14) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$ (R. 1)

15) $\lim_{x\to 0} \log(\tan x) - \log(e^{\pi x}-1)$ (R. $-\log\pi$)

16) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+5x}}{x}$ (R. $-\dfrac{7}{6}$)

17) $\lim_{x\to e} \dfrac{x-e}{1-\log x}$ (R. $-e$, sostituire $\log x$ con $\log(e\dfrac{x}{e}) = 1+\log\dfrac{x}{e}$...)

18) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$ (R. $\sqrt{e}$)

4. Utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0}(1+\pi x)^{\frac{1}{x}}$ (R. e^{π})

2) $\lim_{x\to +\infty}(1+3^{-x})^{3^{x+1}}$ (R. e^3)

3) $\lim_{x\to +\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x$ (R. $\dfrac{1}{e}$)

4) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{\cos x}{x}}$ (R. e^3)

5) $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^x$ (R. e^5)

6) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\tan x}$ (R. e)

7) $\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ (R. e^2)

5. Calcolare i seguenti limiti utilizzando il teorema del confronto:

1) $\lim_{x \to +\infty} x e^{\sin x}$ (R. $+\infty$)

2) $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x$ (R. $+\infty$)

3) $\lim_{x \to 0} x e^{\sin \frac{1}{x}}$ (R. 0)