Esercizio 1

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x<1\\ \frac{3}{4} & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{4} & 1< x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

a) Quale delle due non è una funzione di ripartizione (FDR) e perchè?
b) quale è lo spettro di X?
c) Calcolare la funzione di probabilità
d) disegnare le funzioni di probabilità e di ripartizione

Ricordiamo che lo spettro è l'insieme dei valori assunti dalla v.a.

a) G non è una *FDR* in quanto non è continua da destra in $x=1$

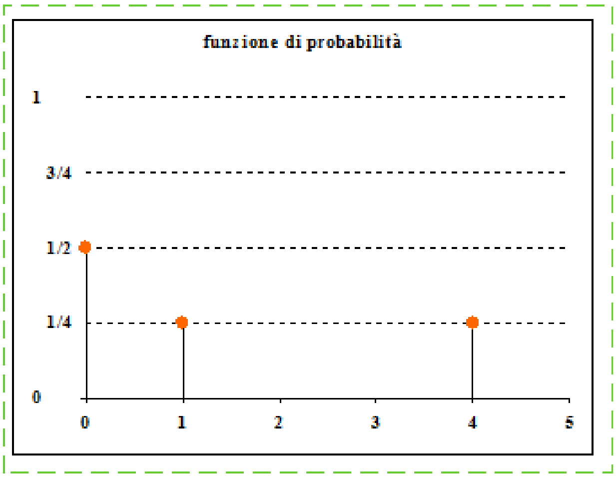
b) Ricordando che, nota la *FDR*, lo spettro è l'insieme dei punti di discontinuità ricaviamo immediatamente $X=\{0,1,4\}$

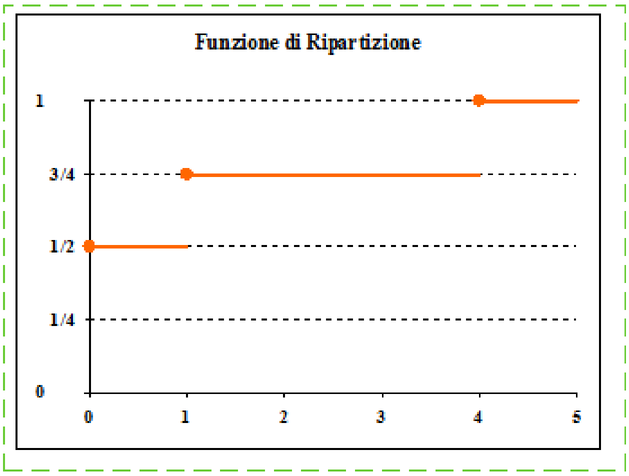
c) Per definizione $f(x_i)=P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$. Applicando tale relazione otteniamo:

$$f(0)=P(X=0)=F(0)=\frac{1}{2}$$

$$f(1)=P(X=1)=F(1)-F(0)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$f(4)=P(X=4)=F(4)-F(1)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$





Esercizio 3

Sia X una v.a. discreta con spettro in $\mathbb{N}$ e fdp data da $p_i = P(X = i) = \frac{k}{2^i}$ $\forall i \geq 0$ con $k > 0$

a) determinare per quale k l'insieme delle coppie $\{(i, p_i)\}_{i\geq 0}$ è effettivamente una distribuzione di probabiltà (ddp) e scrivere la fdp

b) si calcoli la FDR e con essa le seguenti probabilità: $P(X > 3)$, $P(2 \leq X \leq 9)$ e $P(10 \leq X \leq 20)$

NOTA SE $|z| < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$ E $\sum_{i=0}^{K} z^i = \frac{1-z^{K+1}}{1-z}$

a) DEVE ESSERE $1 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{K}{2^i} = K \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = K \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2K$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2}$

INOLTRE $p(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$

b) $F_X(K) = \mathbb{P}[X \leq K] = \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1}$

QUINDI

$\mathbb{P}[X > 3] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 3] = 1 - F_X(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\mathbb{P}[2 \leq X \leq 9] =$

$\mathbb{P}[X \leq 9] - \mathbb{P}[X < 2] = F_X(9) - F_X(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\mathbb{P}[10 \leq X < 20] =$

$\mathbb{P}[X < 20] - \mathbb{P}[X < 10] = F_X(19) - F_X(9) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$