Esercizio 3 Si consideri la funzione dipendente dal parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$f_c(x) := \begin{cases} c\log(x) & x \in (0,1] \\ 0 & x \notin (0,1]. \end{cases}$$

1. Determinare tutti i valori di c per cui f_c è la densità di una variabile assolutamente continua.
2. Sia X una variabile avente tale densità. Si calcoli valore atteso di X, varianza e $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.
3. Siano $\{X_i\}_{i=1}^n$ variabili indipendenti e tutte con la legge determinata al punto (1); calcolare, ricorrendo eventualmente ad una approssimazione, il minimo valore di n tale che $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 9\right) \geq 0.9$.

Sugg: può essere utile provare a derivare $x(\log(x)-1)$ e $x^2(\log(x)-1/2)/2$. Ricordiamo inoltre che $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

(1) $c\log x > 0$ in $(0,1]$

$\Rightarrow c < 0$

$I = (0;1]$

$$1 = \int_{\mathbb{R}} c\log x \, \mathbb{1}_I \, dx = c\int_0^1 \log x \, dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f = \log x & g = x & \int f g' = fg - \int f' g = x\log x - x \\ f' = \frac{1}{x} & g' = 1 & \end{array}}$$

$$= c \lim_{\alpha\to 0} x\log x - x \Big|_\alpha^1 = -c \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

(2) $$\mathbb{E}X = \int_0^1 -x\log x \, dx = \lim_{\alpha \to 0} -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f = -\log x & g = \frac{x^2}{2} & -\frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} \\ f' = -\frac{1}{x} & g' = x & \end{array}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 -x^2\log x \, dx = \lim_{\alpha\to 0} -\frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f = -\log x & g = \frac{x^3}{3} & -\frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{6} \\ f' = -\frac{1}{x} & g' = x^2 & \end{array}}$$

$$\operatorname{Var}X = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}^2X = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

③ PER $n > 30$ $\mathbb{P}[X_n > 9] \simeq 1 - \phi\left(\frac{9 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$ DUNQUE

$$1 - \phi\left(\frac{9 - \frac{n}{4}}{\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{7}}{12}}\right) \geq 0.9 \Rightarrow \phi \leq 0.1 \Rightarrow \phi^{-1} \leq q_{0.1} \Rightarrow$$

$$\frac{12 \cdot 9 - 3n}{\sqrt{7n}} \leq q_{0.1} \Rightarrow 3n + q_{0.1}\sqrt{7n} - 108 \geq 0$$

$a = 3$ $b = q_{0.1}\sqrt{7}$ $c = -108$ $\Delta = b^2 - 4ac = 7q^2 + 1296$

$$\sqrt{n} = \frac{-\sqrt{7}q \pm \sqrt{7q^2 + 1296}}{6}$$ DOVE $q = q_{0.1} = -q_{0.9} \simeq -1.28556$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \simeq \begin{cases} -5{,}46 \\ 6{,}59 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{n} \leq -5.46 \text{ N.A.} \quad \sqrt{n} \geq 6{,}59$$

$$\Rightarrow n \geq 43{,}47 \Rightarrow n \geq 44$$

Esercizio 1 Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale (dipendente da un parametro $c \in \mathbb{R}$)

$$f_c(x) := \begin{cases} c^2/4 & x = \pm 1/2 \\ (2c-1)/6 & x = 1 \\ (2c-1)/3 & x = -1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare tutti i valori di c affinché f_c sia una densità <u>discreta</u>.
2. Sia X una variabile aleatoria di densità f_c (per i valori di c calcolati al punto precedente): si calcoli la media e la varianza di X. Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$? E quanto $\mathbb{P}(X > 1/2)$?
3. Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione calcolata al punto (1). Calcolare (approssimativamente)

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \leq \frac{1}{2}\right).$$

① $\begin{cases} f_c(x) \geq 0 \\ \sum_x f_c(x) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} c \geq 0 \\ 2c-1 \geq 0 \\ 2\frac{c^2}{4} + \frac{2c-1}{6} + \frac{2c-1}{3} = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} c \geq \frac{1}{2} \\ c^2 + 2c - 1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c \geq \frac{1}{2} \\ c^2 + 2c - 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c \geq \frac{1}{2} \\ c_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 & \text{N.A.} \\ +1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow c = 1$

② $\mathbb{E}X = \sum_x x f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$

$\mathbb{E}X^2 = \sum_x x^2 f(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3+4+8}{24} = \frac{5}{8}$

$\text{Var}\,X = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}^2X = \frac{5}{8} - \frac{1}{36} = \frac{45-2}{72} = \frac{43}{72}$

$\mathbb{P}[X \geq \frac{1}{2}] = \mathbb{P}[X = \frac{1}{2}] + \mathbb{P}[X = 1] = \frac{5}{12}$ $\mathbb{P}[X > \frac{1}{2}] = \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{6}$

③ $\bar{X}_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \Rightarrow \mathbb{P}[\bar{X}_{100} \leq \frac{1}{2}] = \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma/\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} (+\frac{1}{2})}{\sigma/10}\right) =$

CORREZIONE CONTINUITÀ

$= \Phi\left(\frac{20}{3\sigma}\right) \simeq \Phi(8.6266) \simeq 1$ SENZA CORREZIONE

$= \Phi\left(\frac{25}{3\sigma}\right) > \Phi\left(\frac{20}{3\sigma}\right) \simeq 1$ CON CORREZIONE (TRASCURABILE)

Esercizio 2 Durante la prova di esame di statistica, il vostro vicino vi chiede di passargli la soluzione del presente esercizio. Un bigliettino lanciato da voi, copre una distanza aleatoria in metri descritta da una variabile assolutamente continua con densità del tipo

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{\sqrt{5}x^a} & x \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Calcolare $a > 0$ tale che f_a sia effettivamente una densità di una variabile assolutamente continua.
2. Sia X una variabile avente la densità calcolata al punto precedente. Calcolare valore atteso, varianza e funzione di ripartizione di X.
3. Il vostro collega è a distanza di 3 metri da voi e se il biglietto cade a più di un metro da lui, l'attento docente vi scoprirà entrambi. Qual è la probabilità di essere scoperti?

① $\begin{cases} \dfrac{1-a}{\sqrt{5}\,x^a} \geq 0 \\ \displaystyle\int_0^5 \frac{1-a}{\sqrt{5}\,x^a}\,dx = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \displaystyle\int_0^5 (1-a)x^{-a}\,dx = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1 \\ 1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{1-a}{1-a}\, x^{1-a}\Big|_0^5 = \sqrt{5}\, 5^{-a} = 5^{\frac{1}{2}-a} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x}}$$

② $$\mathbb{E}X = \int_0^5 \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{5}}\int_0^5 \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\, x^{3/2}\Big|_0^5 = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^5 \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{5}}\,dx = \frac{1}{5\sqrt{5}}\int_0^5 \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{1}{5\sqrt{5}}\, x^{5/2}\Big|_0^5 = 5$$

$$\text{Var}\,X = 5 - \frac{25}{9} = \frac{20}{9}$$

$$\int_0^x \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{5}}\,dt = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{5}}\Big|_0^x = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

③ $$\mathbb{P}[\,|X-3|>1] = \mathbb{P}[X>4] + \mathbb{P}[X \leq 2] = 1 - F(4) + F(2) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \simeq 0.738$$