

Funzioni numeriche: generalità

1. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$ (R. $[0, +\infty)$)

2) $f(x) = \log(1 - x^3)$ (R. $(-\infty, 1)$)

3) $f(x) = \arcsin(x^2 - 2)$ (R. $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$)

4) $f(x) = \log(\sin x + \cos x)$ (R. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

2. Determinare l'insieme di definizione, l'immagine e tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = |x - 1| + |x| + 2\frac{|x|}{x}$ (R. $\mathbb{R} \setminus \{0\}; (-1, +\infty)$); $f(x) = -2x - 1$ se $x < 0$, 3 se $0 < x \leq 1$, $2x + 1$ se $x \geq 1$)

2) $f(x) = [1 - x^2] + \sqrt{1 - x^2}$ (R. $[-1, 1]; [0, 1) \cup \{2\}$); $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ se $x \neq 0$, 2 se $x = 0$)

3. Determinare l'espressione analitica della funzione composta $f \circ g$ dove $f(x) = 1$ se $x \geq 0$, $f(x) = -1$ se $x < 0$; $g(x) = \sin x$. Disegnare il grafico di $f \circ g$. (R. $(f \circ g)(x) = 1$ se $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $(f \circ g)(x) = -1$ altrove)

4. Determinare dominio e immagine delle seguenti funzioni; nel caso la funzione sia invertibile, determinare la funzione inversa

1) $f(x) = x^3 + 2$ (R. $\mathbb{R}, \mathbb{R}, y = \sqrt[3]{x - 2}$)

2) $f(x) = e^{-|x|}$ (R. $(\mathbb{R}, (0, 1])$)

3) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ (R. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \mathbb{R} \setminus \{1\}, y = \frac{x}{1 - x}$)

5. Stabilire se le seguenti funzioni sono periodiche e, in caso affermativo, determinarne il periodo:

1) $\cos(2x + 1)$ (R. π)

2) $\sin(6x) + \cos(3x)$ (R. $\frac{2}{3}\pi$)

3) $2^{\sin x}$ (R. 2π)

4) $(\sin x)^2$ (R. π)

5) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) + (\cos x)^2$ (R. 2π)

6. Calcolare 1) $\arcsin(\sin x)$, con $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$; 2) $\arcsin(\sin x)$, con $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$. (R. 1) $\pi - x$; 2) $x - 2\pi$)

7. Risolvere l'equazione $\sin(\arcsin \frac{x^2}{2}) = x + \frac{3}{2}$ (R. $x = -1, 3$)

8. Calcolare le seguenti espressioni:

- 1) $\arccos(\cos 2)$ (R. 2)
- 2) $\arccos(\cos 4)$ (R. $2\pi - 4$)
- 3) $\arctan(\tan 1)$ (R. 1)
- 4) $\arctan(\tan 2)$ (R. $2 - \pi$)
- 5) $\arcsin(\sin \frac{16}{5}\pi)$ (R. $-\frac{\pi}{5}$)
- 6) $\cos(\arccos x)$ (R. $x, -1 \leq x \leq 1$)

9. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

- 1) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (R. dispari)
- 2) $f(x) = x \sin(2x)$ (R. pari)
- 3) $f(x) = \cos(x^3)$ (R. pari)
- 4) $f(x) = \arctan(2x - x^3)$ (R. dispari)

10. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni a partire dai grafici delle funzioni elementari applicando successive operazioni elementari sul grafico:

- 1) $f(x) = |\ln(3-x)|$
- 2) $f(x) = 1 + (x+2)^{\frac{2}{3}}$
- 3) $f(x) = |2^{-x} - 1|$
- 4) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arccos(1-x)$

(R. 1) $y(x) = \ln x, y_1(x) = y(-x) = \ln(-x)$ si ottiene per riflessione rispetto all'asse y , $y_2(x) = y_1(x-3) = \ln(-x+3)$ si ottiene mediante una traslazione orizzontale verso destra, $f(x) = |y_2(x)|$. 2) $y(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (potenza con esponente

minore di uno, è una funzione pari), $y_1(x) = y(x+2) = (x+2)^{\frac{2}{3}}, f(x) = 1 + y_1(x)$. 3) $y(x) = 2^x, y_1(x) = y(-x) = 2^{-x}, y_2(x) = y_1(x) - 1 = 2^{-x} - 1, f(x) = |y_2(x)|$. 4) $y(x) = \arccos x, y_1(x) = y(-x) = \arccos(-x), y_2(x) = y_1(x-1) = \arccos(-x+1), f(x) = y_2(x) + \frac{\pi}{2}$.