Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Appunti di algebra lineare

Trasformazioni lineari e matrici (teoria)

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Trasformazioni lineari e matrici

1.1. Funzioni lineari

In generale una *funzione* tra due insiemi può essere definita come una "legge" che associa ad ogni elemento dello spazio di partenza un unico elemento nello spazio di arrivo. Ci occupiamo in questa sede di funzioni

$$f : V \to W \tag{1.1.1}$$

dove V e W sono spazi vettoriali. Una funzione del tipo (1.1.1) è dunque interpretabile come una legge che ad ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ associa un unico vettore $\mathbf{w} \in W$. Tra queste funzioni particolarmente importanti sono quelle LINEARI secondo la definizione seguente.

❒ **Definizione 1.1.1.** Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$. Si dice che f è una FUNZIONE LINEARE (O TRASFORMAZIONE LINEARE O OPERATORE LINEARE) se per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ si ha:

(i) additività $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2)$

(ii) omogeneità $f(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha f(\mathbf{v}_1)$.

Le **(i)** e **(ii)** si possono riassumere nell'unica formula

$$f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) \qquad \forall\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K},\ \forall\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{K}$$

✎ **Esempio 1.1.2.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è lineare allora si ha*

$$f(x) = f(x\,1) = xf(1) = \alpha x$$

per $\alpha = f(1)$. Dunque le uniche funzioni lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono del tipo $f(x) = \alpha x$.

✎ **Esempio 1.1.3.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$f(x, y) = (2x - y, x + 3y). \tag{1.1.2}$$

Dimostriamo che f *è lineare. Dimostriamo l'additività. Siano* $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ *e* $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ *due vettori di* $\mathbb{R}^2$. *Si ha*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) \\ &\overset{(1.1.2)}{=} (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)) \\ &= ((2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2), (x_1 + 3y_1) + (x_2 + 3y_2)) \\ &= (2x_1 - y_1, x_1 + 3y_1) + (2x_2 - y_2, x_2 + 3y_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

Dimostriamo l'omogeneità: per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ *e ogni* $\mathbf{v} = (x, y)$ *si ha*

$$f(\lambda\mathbf{v}) = f(\lambda x, \lambda y) \overset{(1.1.2)}{=} (2(\lambda x) - \lambda y, \lambda x + 3(\lambda y)) = (\lambda(2x - y), \lambda(x + 3y)) = \lambda(2x - y, x + 3y) = \lambda f(\mathbf{v}).$$

Quindi f *è lineare.*

✎ **Esempio 1.1.4.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$f(x, y) = (xy, x + y).$$

Allora f *non è lineare. Controesempio: siano* $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *ed* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ *allora*

$$f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(1, 1) = (1, 2) \neq f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2).$$

✎ **Esempio 1.1.5.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da*

$$f(x, y) = (x - y, x + y + 1).$$

Allora f *non è lineare. Controesempio: siano* $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *ed* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ *allora*

$$f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(1, 1) = (0, 3) \neq f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = (1, 2) + (-1, 2) = (0, 4).$$

1.2. Matrici

❒ **Definizione 1.2.1.** Si dice MATRICE di tipo (m, n) su un insieme numerico $\mathscr{A}$, un insieme di $m \cdot n$ numeri appartenenti ad $\mathscr{A}$ disposti in una tabella di m righe (linee orizzontali) e n colonne (linee verticali). Le matrici di tipo $(1, n)$ si dicono anche VETTORI RIGA; quelle di tipo $(m, 1)$ si dicono anche VETTORI COLONNA.

✎ **Esempio 1.2.2.** *La matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

è una matrice di tipo $(3,3)$ *su* $\mathbb{N}$*; la matrice*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & -i & i & -1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di tipo $(1,4)$ *su* $\mathbb{C}$*; la matrice*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{pmatrix}$$

è una matrice di tipo $(3,1)$ *su* $\mathbb{R}$.

Se non altrimenti specificato, considereremo solo matrici su $\mathbb{R}$.
La generica matrice di tipo (m,n) si scriverà come

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il significato del doppio indice è il seguente: a_{ij} è l'elemento di posto i,j cioè l'elemento che si trova nella i-esima riga e nella j-esima colonna.
In maniera sintetica scriveremo $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

❒ **Definizione 1.2.3.** Due matrici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ dello stesso tipo (m,n) si dicono UGUALI se $a_{ij} = b_{ij}$ per $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$.

Andiamo a vedere quali operazioni è possibile definire sulle matrici.

❒ **Definizione 1.2.4.** Date due matrici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ dello stesso tipo (m,n), si definisce $\mathbf{C}$ la matrice SOMMA di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ nel modo seguente:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \qquad i = 1,\dots,m, \;\; j = 1,\dots,n.$$

✎ **Esempio 1.2.5.** *Se*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

❒ **Definizione 1.2.6.** Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice di tipo (m, n) e $\lambda \in \mathbb{R}$; allora la matrice $\lambda\mathbf{A}$ è definita da $\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})$, per $i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, n$.

☞ **Osservazione 1.2.7.** L'insieme delle matrici $\mathscr{M}(m, n)$ di tutte le matrici su $\mathbb{R}$ di tipo (m, n) dotato delle operazioni di somma e di prodotto di una matrice per uno scalare introdotte nelle Definizioni 1.2.4 e 1.2.6 è uno spazio vettoriale. In particolare l'elemento $\mathbf{0}$ è la matrice che ha tutti gli elementi nulli mentre la matrice opposta di $\mathbf{A}$, indicata con $-\mathbf{A}$ è la matrice che ha per elementi gli opposti degli elementi di $\mathbf{A}$. La dimensione dello spazio vettoriale è $m \cdot n$ e la base canonica è costituita dalle $m \cdot n$ matrici aventi tutti gli elementi nulli tranne 1.
In particolare $\mathscr{M}(1, n)$ si identifica con $\mathbb{R}^n$ pensato come spazio di vettori riga; $\mathscr{M}(n, 1)$ si identifica esso pure con $\mathbb{R}^n$ pensato come spazio di vettori colonna. I vettori di $\mathbb{R}^n$ sono particolari matrici.

❒ **Definizione 1.2.8.** Date due matrici $\mathbf{A} = (a_{ik})$ di tipo (m, n) e $\mathbf{B} = b_{ks}$ di tipo (n, p) allora si definisce il prodotto (righe per colonne) di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ come la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ che ha come elemento di posto i, j il prodotto scalare della riga $i-$esima della matrice $\mathbf{A}$ e della colonna $j-$esima di $\mathbf{B}$. In simboli

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{b}^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1, \dots m,\ j = 1, \dots, p$$

dove abbiamo indicato con $\underline{a}_i$ la i-esima riga di $\mathbf{A}$ visto come vettore riga e con $\underline{b}_j$ la $j-$esima colonna di $\mathbf{B}$ visto come vettore colonna.

✎ **Esempio 1.2.9.**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice di tipo } (2,3)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice di tipo } (3,2)} = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 2+0+0 \\ 2+0-3 & 4+4+0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{matrice di tipo } (2,2)}$$

In generale il prodotto tra matrici ha senso solo se il numero di colonne della prima matrice coincide col numero di righe della seconda matrice (in tal caso le due matrici si dicono conformabili). Quindi in generale non ha senso chiedersi se il prodotto di matrici è *commutativo* (infatti anche se $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ esiste e ha senso, non è detto che esista anche $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$.
Se le matrici sono quadrate, allora $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ hanno entrambe senso ma potrebbero essere diverse.

✎ **Esempio 1.2.10.** *Siano*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

allora

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il prodotto righe per colonne tuttavia è ASSOCIATIVO, più precisamente date 3 matrici $\mathbf{A}$ di tipo (m, n), $\mathbf{B}$ di tipo (n, p) e $\mathbf{C}$ di tipo (p, r), allora i due prodotti $\mathbf{A}(\mathbf{B}\,\mathbf{C})$ e $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ sono ben definiti e uguali, quindi possiamo togliere le parentesi e scrivere direttamente $\mathbf{ABC}$.
Per le matrici vale anche la proprietà DISTRIBUTIVA, cioè

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

quando ciò ha senso, cioè se $\mathbf{A}$ è di tipo (n, m) e $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ di tipo (m, r).
Tra le matrici quadrate ne esiste una, denotata con $\mathbf{I}_n$ tale che

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

per ogni matrice quadrata $\mathbf{A}$ dello stesso ordine. Tale matrice si chiama MATRICE IDENTITÀ e ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

❒ **Definizione 1.2.11.** Si chiama MATRICE TRASPOSTA di una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) la matrice $\mathbf{A}^T$ di tipo (n, m) che si ottiene da $\mathbf{A}$ scambiando le righe con le colonne.

✎ **Esempio 1.2.12.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

☞ **Osservazione 1.2.13.** *È facile dimostrare che*

$$\mathbf{AB}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Infatti sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo (m, q) e $\mathbf{B}$ una matrice di tipo (q, n). Allora, per ogni $i = 1, \dots, m$ e per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T_{ij} &\overset{\text{definizione di trasposta}}{=} (\mathbf{A}\,\mathbf{B})_{ji} \\ &\overset{\text{definizione di prodotto righe per colonne}}{=} \sum_{s=1}^{q} \mathbf{A}_{js}\mathbf{B}_{si} \\ &\overset{\text{proprietà commutativa in } \mathbb{R}}{=} \sum_{s=1}^{q} \mathbf{B}_{si}\mathbf{A}_{js} \\ &\overset{\text{definizione di trasposta}}{=} \sum_{s=1}^{q} \mathbf{B}^T_{is}\mathbf{A}^T_{sj} \\ &\overset{\text{definizione di prodotto righe per colonne}}{=} (\mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T)_{ij} \end{aligned}$$

❒ **Definizione 1.2.14.** *Se* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ *allora la matrice si dice* SIMMETRICA.
Una matrice quadrata si dice TRIANGOLARE ALTA (O BASSA) *se ha elementi solo sotto (o sopra) la diagonale principale. Una matrice che è contemporaneamente triangolare alta e triangolare bassa si dice* DIAGONALE.

✎ **Esempio 1.2.15.** *Nell'esempio seguente,* $\mathbf{A}$ *è una matrice triangolare alta,* $\mathbf{B}$ *è una matrice triangolare bassa,* $\mathbf{C}$ *è una matrice diagonale.*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3. Teorema di rappresentazione. Matrice rappresentativa

Abbiamo visto che una matrice quadrata di tipo (n, n) trasforma un vettore di $\mathbb{R}^n$ in un altro vettore di $\mathbb{R}^n$ (mediante il prodotto righe per colonne).

✎ **Esempio 1.3.1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^3}$$

Analogamente una matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) trasforma un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in un vettore $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$. Inoltre dalla definizione di prodotto righe per colonne è facile vedere che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$$
$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{Ax}.$$

Quindi la trasformazione

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$$

è lineare. Analoghe considerazioni valgono se il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ viene sostituito dal campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
Il prossimo teorema afferma che tutte le trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali di dimensione finita si possono rappresentare in questo modo.

Teorema 1.3.2. (teorema di rappresentazione) *Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n e m rispettivamente e sia*

$$\mathcal{L} : V \to W$$

una trasformazione lineare. Fissate due basi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ in V e W rispettivamente, esiste un'unica matrice $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) a elementi in $\mathbb{K}$ che rappresenta $\mathcal{L}$ nel senso che, se $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ e $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m$ allora si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si noti che qualunque sia lo spazio vettoriale V di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, fissata una base in tale spazio, ogni vettore è individuato dalla $n-$upla delle sue componenti rispetto a quella base, cioè da un elemento di $\mathbb{K}^n$. Il teorema afferma quindi l'esistenza di una matrice che rappresenta la trasformazione lineare nel senso che, fissata una base nello spazio di partenza ed una nello spazio di arrivo, il vettore delle componenti di $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ si ottiene moltiplicando la matrice $\mathbf{A}$ per il vettore delle componenti di $\mathbf{x}$.

Si osservi inoltre che nel caso $V = W = \mathbb{R}^n$ (quindi in particolare $n = m$) si può scegliere un'unica base per lo spazio di arrivo e quello di partenza.

$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \in W$ quindi si può scrivere come combinazione lineare degli elementi della base di W_m, cioè

$$\mathcal{L}\mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m$$

per opportuni coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Allo stesso modo si avrà

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ &\mathcal{L}\mathbf{v}_n = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m. \end{aligned}$$

Poniamo $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e sia $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots x_n\mathbf{v}_n$. Per linearità di $\mathcal{L}$ si ha

$$\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{L}(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbf{w}_i.$$

Quindi le componenti scalari di $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ rispetto alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ sono date da

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, \ldots, m.$$

In forma matriciale si ha

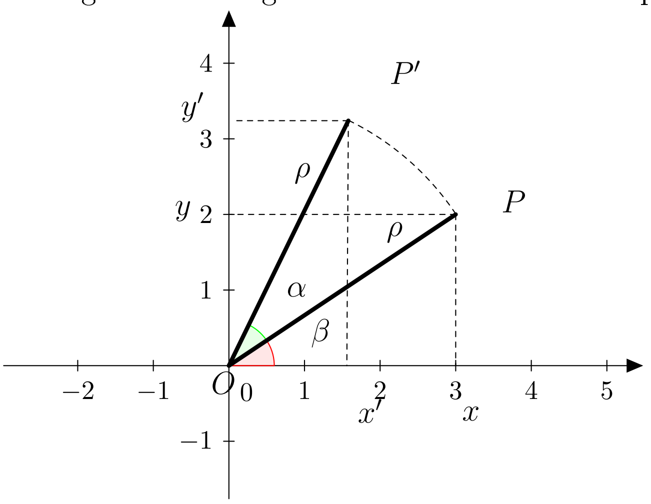
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tale matrice è *unica* come conseguenza del fatto che ogni vettore $\mathcal{L}(\mathbf{v}_j)$ per $j = 1, \ldots, n$ si esprime in manera unica come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$.

☞ **Osservazione 1.3.3.** Si noti che *per costruzione*, la matrice rappresentativa $\mathbf{A}$ ha per colonne le immagini tramite $\mathcal{L}$ dei vettori della base fissata nello spazio di partenza. Questo fatto tornerà ad essere cruciale in seguito, parlando di rango e di matrice di cambiamento di base.

✎ **Esempio 1.3.4.** *Scrivere la matrice che rappresenta una rotazione nel piano di un angolo θ.*

Consideriamo la seguente figura, nella quale un punto P di coordinate (x, y) è ruotato attorno all'origine di un angolo $\alpha > 0$ collocandosi nel punto P' di coordinate (x', y').



Vediamo quali sono le relazioni tra le coordinate di P e quelle di P'.
Dalle note relazioni trigonometriche si ha

$$x = \rho \cos \beta \qquad y = \rho \sin \beta$$

e

$$x' = \rho \cos(\alpha + \beta) \qquad y' = \rho \sin(\alpha + \beta)$$

dove ρ indica la lunghezza di $\overline{OP}$ e di $\overline{OP'}$. Poiché

$$\rho\cos(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\cos\beta - \rho\sin\alpha\sin\beta = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$\rho\sin(\alpha+\beta) = \rho\sin\alpha\cos\beta + \rho\cos\alpha\sin\beta = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

si ha

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Introducendo i vettori colonna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

la (1.3.1) si può riscrivere nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Concludendo: per trovare il punto corrispondente al punto di coordinate (x, y) dopo una rotazione di un angolo α , con centro nell'origine, è sufficiente moltiplicare a sinistra il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ data dalla (1.3.2). Possiamo dunque vedere la rotazione di un angolo α come una trasformazione del piano in sé, ossia come una trasformazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che si verifica essere lineare.

☞ **Osservazione 1.3.5.** Siano $\mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{L}_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ due trasformazioni lineari rappresentate dalle matrici $\mathbf{A}$ di tipo (m, n) e $\mathbf{B}$ di tipo (s, m). Allora è facile verificare che

$$\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s \qquad (\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1) : \mathbf{x} \mapsto \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1\mathbf{x})$$

è una trasformazione lineare che viene rappresentata dalla matrice $\mathbf{C} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$. Lo stesso discorso può essere ripetuto se i tre spazi $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s$ sono sostituiti da spazi vettoriali di dimensioni n, m, s qualunque.

✎ **Esempio 1.3.6.** *Riprendendo l'esempio precedente, vediamo come si realizza l'applicazione successiva di due rotazioni. Supponiamo che il punto P di coordinate x e y venga trasformato da una rotazione rappresentata dalla matrice $\mathbf{A}_\alpha$ data dalla* (1.3.2) *nel punto P' di coordinate x' e y'. Si ha dunque*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se ora al punto P' applichiamo una rotazione di un angolo β, otterremo un punto P'' le cui coordinate x'' e y'' si trovano con la formula

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \mathbf{A}_\beta \left(\mathbf{A}_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

Poiché il prodotto righe per colonne è associativo, si arriva dunque a

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cioè: se ad $\mathbf{A}_\alpha$ è associata la rotazione di un angolo α e ad $\mathbf{A}_\beta$ è associata la rotazione di un angolo β, alla matrice $\mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha$ risulta associata la rotazione di un angolo $\alpha + \beta$.

1.4. Determinante

Il determinante è una funzione che ad ogni matrice quadrata di tipo (n, n)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

associa uno scalare. Premettiamo prima di tutto alcune definizioni.

❒ **Definizione 1.4.1.** Si chiama MINORE COMPLEMENTARE di un elemento a_{ij}, e si indica con il simbolo M_{ij}, il determinante della matrice ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

✎ **Esempio 1.4.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

❒ **Definizione 1.4.3.** Si chiama COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dove M_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij}.

✎ **Esempio 1.4.4.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1$$

Arriviamo dunque alla seguente definizione.

❒ **Definizione 1.4.5.** Si chiama DETERMINANTE della matrice quadrata $\mathbf{A}$ di tipo (n, n) definita in (1.4.1) la somma dei prodotti degli elementi di una qualunque linea (riga o colonna) per i loro rispettivi complementi algebrici. Ad esempio, sviluppando secondo la riga k-esima, si ha per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$\det\mathbf{A} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{1.4.2}$$

mentre sviluppando secondo la colonna k-esima, si ottiene, sempre per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$\det\mathbf{A} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{1.4.3}$$

✎ **Esempio 1.4.6.** *Se $n = 2$, allora*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e sviluppando ad esempio rispetto alla prima riga, si ha $\det\mathbf{A} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

✎ **Esempio 1.4.7.** *Sia*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora sviluppando secondo gli elementi della prima riga si ottiene

$$\det\mathbf{A} = 1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Si ottiene lo stesso risultato sviluppando secondo gli elementi di un'altra riga, ad esempio

$$\det\mathbf{A} = 2\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Si dimostra che in generale questo è sempre vero, come enunciato nel prossimo teorema.

Teorema 1.4.8. (TEOREMA DI LAPLACE) *Il risultato che si ottiene calcolando il determinante come nelle formule* (1.4.2)–(1.4.3) *non dipende dalla riga o dalla colonna scelta.*

✎ **Esempio 1.4.9.** *Ad esempio nel caso della matrice*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si potrà scegliere di sviluppare il determinante secondo una riga (o una colonna) "comoda", per esempio sviluppando secondo l'ultima riga si ottiene

$$\det\mathbf{C} = 1\,(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Teorema 1.4.10. (proprietà elementari del determinante) *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice di tipo* (n, n). *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Se* $\mathbf{A}$ *ha una riga o una colonna di zeri, allora det*$\mathbf{A} = 0$

(b) *Scambiando due righe o due colonne, il determinante cambia segno*

(c) *Se* $\mathbf{A}$ *ha due righe o colonne uguali, allora det*$\mathbf{A} = 0$

(d) *Il determinante è una funzione lineare di ciascuna riga o ciascuna colonna, cioè ad esempio*

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

e anche

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_i \text{ vettori riga}$$

(e) *Se a una riga (colonna) si aggiunge una qualunque combinazione lineare delle altre righe (colonne) il determinante non cambia*

(f) *Se le righe (colonne) di* $\mathbf{A}$ *sono vettori linearmente dipendenti allora det*$\mathbf{A} = 0$

(g) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det\mathbf{A}$

(h) *Se* $\mathbf{A}$ *è una matrice triangolare (in particolare se è una matrice diagonale) allora*

$$\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Vale inoltre il seguente importante risultato.

Teorema 1.4.11. (TEOREMA DI BINET) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora*

$$\det\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B}$$

1.4.1. Significato geometrico del determinante: caso $n = 2$

Dati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, abbiamo introdotto il PRODOTTO VETTORIALE $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ come il vettore caratterizzato dalle seguenti proprietà:
1) lunghezza: $|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,\sin\alpha$, dove $0 \leq \alpha \leq \pi$ è l'angolo formato dai due vettori. La lunghezza del vettore rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
2) $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ è perpendicolare al piano di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
3) $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ rappresenta una terna destrorsa.
Tra le principali proprietà del prodotto vettoriale si trova la seguente:
$\boxed{\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \mathbf{w} \text{ se e soltanto se } \mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \mathbf{0}.}$
A livello di componenti: se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ allora

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)\mathbf{i} + (x_3\,y_1 - x_1\,y_3)\mathbf{j} + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\mathbf{k}.$$

Usando la nozione di determinante di una matrice (sviluppando simbolicamente secondo la prima riga) si ottiene (alternativamente si può usare la regola di *Sarrus*)

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Supponiamo ora di avere a che fare con vettori complanari (cioè $x_3 = y_3 = 0$). Si ha dunque

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad |\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{1.4.4}$$

Ricordando il significato geometrico, si ha che il modulo del determinante coincide con l'area del parallelogramma costruito sui due vettori piani (x_1, x_2), (y_1, y_2). Poiché l'area del parallelogramma è nulla se e soltanto se i vettori sono paralleli, allora la condizione di parallelismo espressa tra le proprietà precedenti può essere interpretata in termini matriciali nel modo seguente:

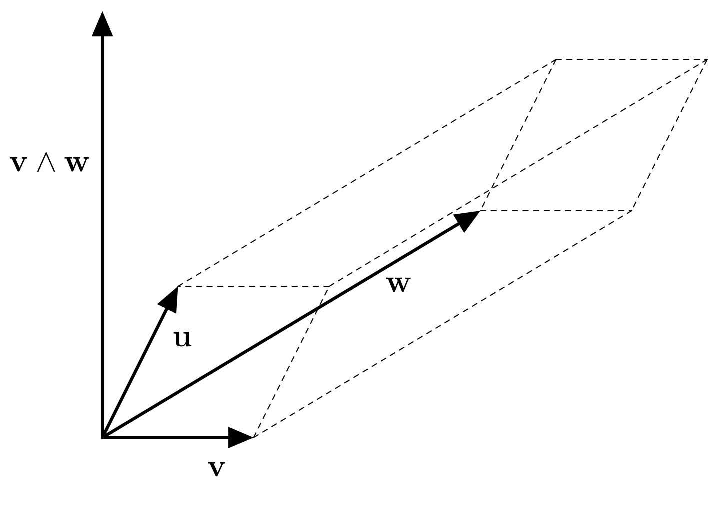
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e soltanto se il determinante della matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 0$ se e soltanto se il determinante della sottomatrice 2×2 in (1.4.4) è uguale a zero se e soltanto se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli (cioè linearmente dipendenti).

1.4.2. Significato geometrico del determinante: caso $n = 3$

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono tre vettori nello spazio tridimensionale, il loro prodotto misto è definito dal numero reale

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Le parentesi sono inutili perché la scrittura è univoca (non si potrebbe fare $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ perché il prodotto scalare tra due vettori dà uno scalare a cui non si può applicare il prodotto vettoriale per un terzo vettore).
Geometricamente il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. L'area di base è data da $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ mentre l'altezza è data dalla componente di $\mathbf{u}$ nella direzione $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ perpendicolare alla base.



Quindi una conseguenza importante di questa interpretazione geometrica è data da:

$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ sono complanari.}}$

Infatti, se il prodotto misto dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo, allora significa (per una proprietà del prodotto scalare) che $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ e pertanto giace nel piano individuato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, da cui la complanarità dei tre vettori.
A livello di componenti, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ allora si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = u_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

In termini matriciali, questa scrittura può essere interpretata come

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Il modulo del determinante rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Poiché a sua volta il volume del parallelepipedo è nullo se e soltanto se i 3 vettori che lo generano sono complanari, si ha anche che il determinante 3×3 della precedente matrice è nullo se e soltanto se le sue righe (o colonne) sono 3 vettori complanari. Questo significa che i tre vettori sono *linearmente dipendenti*.

1.5. Rango di una matrice

Abbiamo visto dal paragrafo precedente che se le righe (colonne) di una matrice $\mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti, allora det$\mathbf{A} = 0$. Abbiamo poi visto, interpretando il significato geometrico del determinante nel caso $n = 2, 3$ che, almeno in questi casi particolari, vale anche il viceversa. Ci chiediamo se questo è vero non solo per $n = 2, 3$ ma per n qualsiasi. La risposta è affermativa. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 1.5.1. *Siano $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ r vettori riga di $\mathbb{R}^n$ con $r < n$ e sia $\mathbf{A}$ la matrice (r, n) che ha per righe questi vettori. Allora i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ sono linearmente dipendenti se e soltanto se ogni matrice di tipo (r, r) estratta da $\mathbf{A}$ ha determinante nullo; sono linearmente indipendenti se e soltanto se esiste almeno una matrice di tipo (r, r) estratta da $\mathbf{A}$ con determinante diverso da n. Inoltre n vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e soltanto se la matrice di tipo (n, n) che si ottiene accostandoli ha determinante uguale a zero; sono linearmente indipendenti se al contrario tale matrice ha determinante diverso da zero.*

In particolare mostreremo ora che r vettori di $\mathbb{R}^n$ con $r > n$ sono sempre linearmente dipendenti. Introduciamo prima il concetto di RANGO O CARATTERISTICA.

❐ **Definizione 1.5.2.** Dati una matrice $\mathbf{A}$ di m righe e n colonne (con m non necessariamente uguale a n) e un intero $k \leq \min(m,n)$ si dice MINORE di ordine k estratto dalla matrice $\mathbf{A}$ il determinante di una qualsiasi matrice di ordine k ottenuta con gli elementi comuni a k righe e a k colonne di $\mathbf{A}$. Si definisce RANGO O CARATTERISTICA di $\mathbf{A}$ l'intero $r \geq 0$ tale che: esiste un minore estratto da $\mathbf{A}$ di ordine r non nullo e ogni minore estratto da $\mathbf{A}$ di ordine $r+1$ è nullo.

Dal Teorema 1.5.1 segue subito che

Il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti.

Per la determinazione del rango è utile la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.3. (KRONECKER) *Condizione necessaria e suficiente affinché una matrice abbia rango k è che esista un minore di ordine k diverso da zero e che siano nulli tutti i minori di ordine $k+1$ ottenuti da quello orlandolo con una qualunque altra riga o colonna.*

La differenza tra la proposizione di Kronecker e la definizione di rango è che nel primo caso non occorre testare tutti i possibili minori di ordine $k+1$ ma solo quelli ottenuti dal minore non nullo a cui si aggiunge poi una qualunque altra riga o colonna. La proposizione quindi permette di velocizzare i calcoli, semplificando e riducendo il numero di prove al fine di determinare il rango.

✎ **Esempio 1.5.4.** *Determinare il rango delle seguenti matrici*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda la matrice $\mathbf{A}$ al massimo può avere rango 2, perché è una matrice 2 righe per 3 colonne. E infatti estraendo la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha che $\det\mathbf{M} = -3 \neq 0$ quindi effettivamente il rango di $\mathbf{A}$ è 2.

Per quanto riguarda la matrice $\mathbf{B}$, il massimo rango B può essere 3 perché $\mathbf{B}$ è una matrice di 3 righe per 4 colonne; tuttavia si nota subito che essa non può avere rango massimo perché la prima e la terza riga sono linearmente dipendenti (una moltipla dell'altra); d'altra parte, estraendo la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha che det$\mathbf{M} = 1 \neq 0$ quindi effettivamente il rango di $\mathbf{B}$ è 2.

La matrice $\mathbf{C}$ è una matrice 3×3 quindi al massimo può avere rango 3; in realtà $\mathbf{C}$ ha la prima e la terza riga uguali quindi il suo determinante sarà nullo e perciò non potrà avere rango massimo. D'altra parte, estraendo la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si ha che det$\mathbf{M} = 2 \neq 0$ quindi anche il rango di $\mathbf{C}$ è 2.

La matrice $\mathbf{D}$ è una matrice con 3 righe e 4 colonne quindi al massimo può avere rango 3; e infatti, estraendo la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha che det$\mathbf{M} = -2 \neq 0$ quindi il rango di $\mathbf{D}$ è 3.

✎ **Esempio 1.5.5.** *Calcolare il rango della matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

al variare del parametro reale k.

La matrice $\mathbf{A}$ è a 3 righe e 4 colonne; quindi il rango massimo può essere 3.
Isoliamo la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

che ha determinante uguale a $-2k^2 + k + k^2 = k - k^2 = k(1-k)$. Quindi se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ allora abbiamo trovato un minore di ordine 3×3 diverso da zero perciò il rango di $\mathbf{M}$ sarà 3.
Sia ora $k = 0$; la matrice data diventa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isolando la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

esso ha determinante uguale a 1 quindi di nuovo anche in questo caso il rango rimane 3.
Infine se $k = 1$ la matrice data diventa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ma si vede chiaramente che la prima riga è la somma delle altre due; quindi $\mathbf{M}$ non può avere rango massimo. D'altra parte, isolando ad esempio la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

si vede che esso ha determinante uguale a 1, quindi il rango della matrice data è 2.
Riassumendo: per $k \neq 1$ il rango di $\mathbf{A}$ è uguale a 3; per $k = 1$ il rango di $\mathbf{A}$ è 2.

✎ **Esempio 1.5.6.** *Se $\mathbf{A}$ è una matrice di rango r allora:*
a) le prime r righe di A sono linearmente indipendenti?
b) r qualsiasi colonne di A sono linearmente indipendenti?
c) se $s \leq r$ esiste in A un minore non nullo di ordine s?
d) i minori di ordine r sono diversi da zero?
e) esiste almeno un minore di ordine $r + 1$ nullo?

a) NO. Non si tratta necessariamente delle prime r righe; si sa che r righe sono linearmente indipendenti ma potrebbero non essere le prime r.
b) NO. Di nuovo, se il rango della matrice è r si sa che ci sono r colonne linearmente indipendenti ma ovviamente non sono un sottoinsieme qualsiasi.
c) SI. Per definizione di rango, esiste un minore di ordine r non nullo e quindi necessariamente ne deve esistere uno di ordine s. In termini di lineare indipendenza di vettori: se il rango di una matrice è r, ci sono necessariamente r vettori linearmente indipendenti per cui anche s vettori con $s \leq r$ sono necessariamente linearmente indipendenti.
d) NO. Non necessariamente tutti i minori di ordine r sono non nulli. Basta che ne esista uno; gli altri possono essere nulli oppure no.
e) SI. Se infatti tutti i minori di ordine $r+1$ fossero non nulli, il rango sarebbe (almeno) $r+1$, per cui necessariamente deve esistere almeno un minore di ordine $r + 1$ nullo.

1.6. Matrice inversa

Nel campo dei numeri reali, si sa che se $a \neq 0$ allora esiste unico l'elemento $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tale che $a\,\frac{1}{a} = 1$. Ci chiediamo se questo vale anche per le matrici ed in particolare qual è la condizione analoga a $a \neq 0$ per le matrici.

❒ **Definizione 1.6.1.** Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di tipo (n, n). Definiamo MATRICE INVERSA di $\mathbf{A}$ (se esiste) la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ tale che

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 1.6.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la matrice inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ *di* $\mathbf{A}$ *è che* $\mathbf{A}$ *sia* NON SINGOLARE *cioè* $\det\mathbf{A} \neq 0$. *In tal caso si ha*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \tag{1.6.1}$$

dove gli A_{ij} *sono i complementi algebrici degli elementi* a_{ij} *di* $\mathbf{A}$ *e inoltre*

$$\det\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}. \tag{1.6.2}$$

Per prima cosa proviamo che se esiste $\mathbf{A}^{-1}$ allora si ha $\det\mathbf{A} \neq 0$. Infatti dalla definizione si ottiene

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

da cui (Teorema di Binet)

$$1 = \det\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-\mathbf{1}} = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{A}^{-1}$$

da cui $\det\mathbf{A} \neq 0$ e (1.6.2).
Sia ora $\det\mathbf{A} \neq 0$ e proviamo che esista la matrice inversa di $\mathbf{A}$ data dalla formula (1.6.1). Per mostrare che (1.6.1) mostriamo prima di tutto che

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \tag{1.6.3}$$

(analogo sarà poi il conto di $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$). Prendiamo l'elemento di posto ki in $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, denotato con b_{ki}. Per dimostrare (1.6.3), occorre mostrare che

$$b_{ki} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i. \end{cases}$$

Allora, dalla definizione di prodotto righe per colonne

$$b_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{1}{\det\mathbf{A}} \underbrace{A_{ij}}_{\text{si tratta della trasposta!}} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij}. \tag{1.6.4}$$

Dunque se $k = i$, l'ultimo termine della (1.6.4) non è altro che (per definizione) il determinante di $\mathbf{A}$, quindi semplificando si ottiene $b_{ki} = b_{ii} = 1$. Invece se $k \neq i$ bisogna interpretare in maniera adeguata l'ultimo termine della (1.6.4). Consideriamo una nuova matrice che chiameremo $\mathbf{A}'$ ottenuta a partire da $\mathbf{A}$ sostituendo la riga i-e sima con la riga k-esima. Allora la matrice $\mathbf{A}'$ per costruzione ha due righe uguali quindi $\det\mathbf{A}' = 0$; d'altra parte, per definizione di determinante

$$\det\mathbf{A}' = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

perché cambiando la riga i (per costruire la matrice $\mathbf{A}'$ a partire dalla matrice $\mathbf{A}$), i complementi algebrici non vengono cambiati. Dunque se $k \neq i$, $b_{ki} = 0$ e la dimostrazione è conclusa.

✎ **Esempio 1.6.3.** *Sia data la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare $\mathbf{A}^{-1}$.

Abbiamo (almeno!) due modi per risolvere l'esercizio. Il primo modo consiste nell'applicare direttamente la formula (1.6.1). Si ha

$$\det\mathbf{A} = 6 \neq 0$$

quindi è verificata la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della matrice inversa. Calcoliamo ora tutti i complementi algebrici (ricordandoci alla fine di fare la trasposta!). Si ha:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 \qquad A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

da cui

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 20 & -1 & -12 \\ -10 & 2 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente possiamo procedere utilizzando il cosiddetto *algoritmo di Gauss-Jordan*: consideriamo la matrice data $\mathbf{A}$ e costruiamo la matrice ottenuta aggiungendo alle colonne di $\mathbf{A}$ le colonne della matrice identità

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora riduciamo a scala questa matrice fino ad ottenere che le prime tre colonne sono le colonne della matrice identità: le ultime 3 colonne della matrice data daranno la matrice inversa di $\mathbf{A}$. Denotiamo con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ le tre righe di questa nuova matrice e procediamo per obiettivi:

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{21} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{31} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{32} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_3 - \frac{1}{6}\mathbf{e}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{22} = 1. \text{ Operazione: } \frac{\mathbf{e}_2}{6}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{23} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{12} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Obiettivo: } a_{13} = 0. \text{ Operazione: } \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{6} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{6} & -2 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 1.6.4. (prodotto di matrici invertibili) *Se* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *sono due matrici quadrate non singolari, allora* $\mathbf{AB}$ *è non singolare e vale*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Per il teorema di Binet, se $\det\mathbf{A} \neq 0$ e $\det\mathbf{B} \neq 0$ allora

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} \neq 0$$

quindi la matrice $\mathbf{AB}$ è non singolare. Verifichiamo che effettivamente $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ costituisce l'inversa di $\mathbf{AB}$. Si ha

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$
$$(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

1.7. Immagine e nucleo di una trasformazione lineare $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare.

❒ **Definizione 1.7.1.** Si chiama IMMAGINE di $\mathcal{L}$, e si indica con $\mathrm{Im}\mathcal{L}$, l'insieme dei vettori che sono i trasformati di un qualche vettore di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\mathcal{L} \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathcal{L}(\mathbf{x})$$

Teorema 1.7.2.

(1) $\mathrm{Im}\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$

(2) Fissate le basi di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, sia $\mathbf{A}$ la matrice di tipo (m, n) che rappresenta $\mathcal{L}$. Allora

$$\mathrm{dim}\mathrm{Im}\mathcal{L} = \text{rango di } \mathbf{A}.$$

(1) Dalla linearità di $\mathcal{L}$ si ha che se $\mathbf{y}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{y}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{x}_2)$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 = \alpha\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) + \beta\mathcal{L}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{L}(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2).$$

Quindi $\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2 \in \mathrm{Im}\mathcal{L}$ perché è il trasformato di un vettore di $\mathbb{R}^n$ (nello specifico, si tratta del vettore $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$).
(2) Per costruzione di matrice rappresentativa, le colonne di $\mathbf{A}$ sono le componenti scalari di $\mathcal{L}(\mathbf{v}_i)$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^m$ $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m$, dove i $\mathbf{v}_i$ sono la base di $\mathbb{R}^n$ che è stata fissata. Quindi $\mathrm{Im}\mathcal{L}$ è generato dai vettori $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1)$, $\mathcal{L}(\mathbf{v}_2)$, $\dots$, $\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)$. Se r di queste colonne sono linearmente indipendenti, dalla definizione di rango si ha dunque $r = \mathrm{dim}\mathrm{Im}\mathcal{L}$.

CONSEGUENZA: le matrici che rappresentano (rispetto a basi diverse) la stessa trasformazione lineare hanno lo stesso rango.

❒ **Definizione 1.7.3.** Il NUCLEO di una trasformazione lineare $\mathcal{L}$, denotato con $\mathrm{Ker}\mathcal{L}$ è l'insieme dei vettori che hanno come immagine il vettor nullo di $\mathbb{R}^m$, cioè

$$\mathrm{Ker}\mathcal{L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m\}$$

Teorema 1.7.4.

(1) $\mathrm{Ker}\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

(2)
$$\mathrm{dimKer}\mathcal{L} + \mathrm{dimIm}\mathcal{L} = n.$$

(1) Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{Ker}\mathcal{L}$ allora $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ e, dalla linearità di $\mathcal{L}$, si ha per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) + \beta\mathcal{L}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$$

da cui la tesi.
(2) Poniamo $k = \mathrm{dimKer}\mathcal{L}$. Scegliamo una base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ per $\mathrm{Ker}\mathcal{L}$ e completiamo la base fino ad arrivare a una base di $\mathbb{R}^n$ (abbiamo visto che questa operazione è sempre possibile, per esempio col metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt). Sia dunque

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$$

la base di $\mathbb{R}^n$ ottenuta completando la base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ per $\mathrm{Ker}\mathcal{L}$. Sia ora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{w}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

Ma $\mathcal{L}(\mathbf{w}_j) = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{w}_j$ è una base del nucleo, quindi

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \alpha_{k+1}\mathcal{L}(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)$$

dunque i vettori $\mathcal{L}(\mathbf{v}_i)$ risultano un sistema di generatori per $\mathrm{Im}\mathcal{L}$. Sono $n-k$ vettori, quindi

$$\mathrm{dimIm}\mathcal{L} \leq n - k.$$

Mostriamo ora che $\mathrm{dimIm}\mathcal{L} = n - k$ cioè mostriamo che i precedenti vettori sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che siano linearmente dipendenti. Allora per definizione di lineare dipendenza, la generica combinazione lineare che dà il vettor nullo è a coefficienti non tutti nulli, cioè

$$\mathbf{0} = \beta_{k+1}\mathcal{L}(\mathbf{v}_{k+1}) + \beta_{k+2}\mathcal{L}(\mathbf{v}_{k+2}) + \cdots + \beta_n\mathcal{L}(\mathbf{v}_n)$$

per qualche $\beta_j \neq 0$. Dalla linearità di $\mathcal{L}$ si ha

$$\mathbf{0} = \mathcal{L}(\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \beta_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n) =: \mathcal{L}(\mathbf{w})$$

con $\mathbf{w} := \beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \beta_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n \neq 0$ perché esiste almeno un $\beta_j \neq 0$. Quindi $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\mathcal{L}$ e allora per definizione è combinazione lineare degli elementi della base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$, ma questo è assurdo perché i vettori $\mathbf{w}_k$ e $\mathbf{v}_h$ sono linearmente indipendenti (sono la base di $\mathbb{R}^n$).

❒ **Definizione 1.7.5.** *Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se $\mathrm{Im}\mathcal{L} = \mathbb{R}^m$ allora $\mathcal{L}$ si dice* SURIETTIVA. *In tal caso l'equazione $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ha almeno una soluzione comunque dato $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se invece $\mathrm{Ker}\mathcal{L} = \mathbf{0}$ allora $\mathcal{L}$ si dice* INIETTIVA *e l'equazione $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione nulla. Se $\mathcal{L}$ è iniettiva e suriettiva allora si dice* BIIETTIVA *e la corrispondenza stabilita da $\mathcal{L}$ si dice* BIUNIVOCA. *In tal caso l'equazione $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ha esattamente una sola soluzione.*

☞ **Osservazione 1.7.6.** *Se $n = m$ e $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare, allora si verifica facilmente che*

$$\mathrm{dimKer}\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{dimIm}\mathcal{L} = n$$

cioè $\mathcal{L}$ è iniettiva se e soltanto se è suriettiva (e quindi biiettiva). Quindi l'equazione $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ se ha soluzione, ne ha una sola (se c'è esistenza, c'è anche unicità). Nel caso $n \neq m$ questo ovviamente non è più verificato.

Ci chiediamo ora se c'è un modo per determinare a priori quante soluzioni ha l'equazione $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, magari interpretando la trasformazione lineare $\mathcal{L}$ attraverso la sua matrice rappresentativa. A questo proposito risponderemo con la teoria dei sistemi lineari.

1.8. Bibliografia consigliata

• [BPS1] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: “Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare”, Zanichelli.

• [L] F.G. Lastaria, M. Saita: “Appunti di algebra lineare”, Politecnico di Milano, Gennaio 2011 (Edizione corretta)