Exercise 1.5: After lunch one day, Alice suggests to Bob the following method to determine who pays. Alice pulls three six-sided dice from her pocket. These dice are not the standard dice, but have the following numbers on their faces:

- die A – 1, 1, 6, 6, 8, 8;
- die B – 2, 2, 4, 4, 9, 9;
- die C – 3, 3, 5, 5, 7, 7.

The dice are fair, so each side comes up with equal probability. Alice explains that Alice and Bob will each pick up one of the dice. They will each roll their die, and the one who rolls the lowest number loses and will buy lunch. So as to take no advantage, Alice offers Bob the first choice of the dice.

(a) Suppose that Bob chooses die A and Alice chooses die B. Write out all of the possible events and their probabilities, and show that the probability that Alice wins is greater than 1/2.

(b) Suppose that Bob chooses die B and Alice chooses die C. Write out all of the possible events and their probabilities, and show that the probability that Alice wins is greater than 1/2.

(c) Since die A and die B lead to situations in Alice's favor, it would seem that Bob should choose die C. Suppose that Bob does choose die C and Alice chooses die A. Write out all of the possible events and their probabilities, and show that the probability that Alice wins is still greater than 1/2.

45. A product is classified according to the number of defects it contains and the factory that produces it. Let X_1 and X_2 be the random variables that represent the number of defects per unit (taking on possible values of 0, 1, 2, or 3) and the factory number (taking on possible values 1 or 2), respectively. The entries in the table represent the joint possibility mass function of a randomly chosen product.

$X_1 \backslash X_2$	**1**	**2**
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

(a) Find the marginal probability distributions of X_1 and X_2.

(b) Find $E[(X_1)]$, $E[(X_2)]$, $\mathrm{Var}(X_1)$, $\mathrm{Var}(X_2)$, and $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Si consideri la famiglia di funzioni reali di variabile reale ad un parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$f_c(x) := \begin{cases} e^{-cx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. Per quali valori di c la funzione rappresenta la densità di una variabile assolutamente continua?
2. Al variare dei valori di c ammissibili calcolati in precedenza e denotato con X la variabile, se ne calcoli il valore atteso e la funzione di ripartizione
3. Quanto vale $\mathbb{P}[X \geq t+s \mid X \geq t]$ con $t, s \geq 0$?
4. Sia $\{X_i\}_{i=1}^{100}$ una successione di variabili i.i.d. con densità $f_1(x)$. Assumendo le uguaglianze $\mathbb{E}X_i = VarX_i = 1$ calcolare approssimativamente $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 100\right]$.

Esercizio 3 Si consideri la funzione dipendente dal parametro $c \in \mathbb{R}$:

$$f_c(x) := \begin{cases} c\log(x) & x \in (0,1] \\ 0 & x \notin (0,1]. \end{cases}$$

1. Determinare tutti i valori di c per cui f_c è la densità di una variabile assolutamente continua.

2. Sia X una variabile avente tale densità. Si calcoli valore atteso di X, varianza e $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.

3. Siano $\{X_i\}_{i=1}^n$ variabili indipendenti e tutte con la legge determinata al punto (1); calcolare, ricorrendo eventualmente ad una approssimazione, il minimo valore di n tale che $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 9\right) \geq 0.9$.

Sugg: può essere utile provare a derivare $x(\log(x) - 1)$ *e* $x^2(\log(x) - 1/2)/2$. *Ricordiamo inoltre che* $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$ *per ogni* $\alpha > 0$.

Esercizio 1 Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale (dipendente da un parametro $c \in \mathbb{R}$)

$$f_c(x) := \begin{cases} c^2/4 & x = \pm 1/2 \\ (2c-1)/6 & x = 1 \\ (2c-1)/3 & x = -1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare tutti i valori di c affinché f_c sia una densità discreta.

2. Sia X una variabile aleatoria di densità f_c (per i valori di c calcolati al punto precedente): si calcoli la media e la varianza di X. Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$? E quanto $\mathbb{P}(X > 1/2)$?

3. Siano $X_1, \ldots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione calcolata al punto (1). Calcolare (approssimativamente)

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 2 Durante la prova di esame di statistica, il vostro vicino vi chiede di passargli la soluzione del presente esercizio. Un bigliettino lanciato da voi, copre una distanza aleatoria in metri descritta da una variabile assolutamente continua con densità del tipo

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{\sqrt{5}x^a} & x \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Calcolare $a > 0$ tale che f_a sia effettivamente una densità di una variabile assolutamente continua.

2. Sia X una variabile avente la densità calcolata al punto precedente. Calcolare valore atteso, varianza e funzione di ripartizione di X.

3. Il vostro collega è a distanza di 3 metri da voi e se il biglietto cade a più di un metro da lui, l'attento docente vi scoprirà entrambi. Qual è la probabilità di essere scoperti?

Esercizio 4 Si consideri la seguente funzione

$$f_k(x) := \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{x}} & x \in (0,9) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dipendente da un parametro reale $k \in \mathbb{R}$.

1. Per quali valori di k la funzione f_k è una densità di una variabile assolutamente continua?

2. Sia X una variabile con la densità calcolata al punto precedente, trovare il valore atteso e la funzione di ripartizione.

3. Un sistema ha due componenti, A e B, in parallelo. Il componente A è formato da 5 componenti in serie (ciascuno) di affidabilità $\mathbb{P}(X \geq 4)$ mentre B è formato da 8 componenti in serie (ciascuno) di affidabilità $\mathbb{P}(X \geq 3)$. Quale componente, tra A e B, è più affidabile? Qual è l'affidabilità complessiva del sistema?