Esercizio 1:
Si supponga di estrarre, senza reinserirle nel mazzo, 3 carte da un mazzo da 52. Si calcoli la probabilità di ottenere

a) 3 figure
b) una figura alla seconda estrazione.

52 CARTE : 12 FIGURE + 40 NUMERI

$A = \{3 \text{ FIGURE}\}$

a) $$\mathbb{P}[A] = \frac{\#FAV}{\#POSS} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

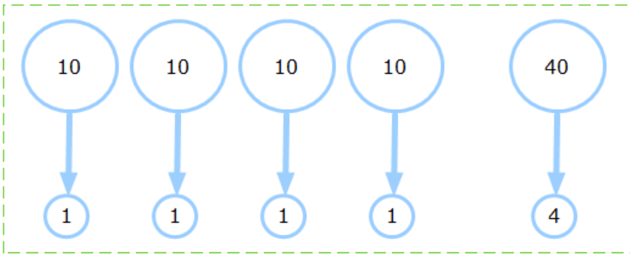
OPPURE $A_i = \{\text{FIGURA ALLA } i\text{ESIMA ESTRAZIONE}\}$ ALLORA

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_3 A_2 A_1] = \mathbb{P}[A_3 | A_2 A_1]\mathbb{P}[A_2 A_1] = \mathbb{P}[A_3 | A_2 A_1]\mathbb{P}[A_2 | A_1]\mathbb{P}[A_1] = \frac{10}{50} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{12}{52}$$

b) $$\mathbb{P}[A_2] = \mathbb{P}[A_2 | A_1]\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2 | A_1^c]\mathbb{P}[A_1^c] = \frac{11}{51} \cdot \frac{12}{52} + \frac{12}{51} \cdot \frac{40}{52} = \frac{12 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{3}{13}$$

Esercizio 3: A scommette con B che estrarrà 4 carte di 4 semi diversi da un mazzo di 40 carte (che ne contiene 10 per seme). Qual è la probabilità che A vinca?
(Huygens, 1657)

NON SVOLTO IN AULA



$A_i = \{$ i esima carta con seme diverso dai precedenti $\}$

$A = \{$ 4 carte con semi distinti $\}$

ATTENZIONE $A \neq A_4$

$A_4 = \{$ la quarta carta ha il seme diverso da quello delle tre carte precedenti ma le tre carte precedenti hanno semi qualsiasi. Anche uguali. $\}$

$A = A_4 A_3 A_2 A_1$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}} = \frac{10^3}{13 \cdot 19 \cdot 37} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 30}{37 \cdot 38 \cdot 39}$$

OPPURE $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_4 A_3 A_2 A_1] = \mathbb{P}[A_4 | A_3 A_2 A_1]\, \mathbb{P}[A_3 | A_2 A_1]\, \mathbb{P}[A_2 | A_1]\, \mathbb{P}[A_1] = \frac{10}{37} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{40}{40}$

Esercizio 7

Una compagnia assicurativa è convinta che le persone sia divise tra predisposte a subire incidenti e non predisposte.

Le loro statistiche mostrano che una persona predisposta subirà un incidente nel corso di un anno con probabilità 0.4 mentre per una persona non predisposta tale probabilità scende a 0.2

Assumendo che il 30% della popolazione sia predisposta agli incidenti, quale è la probabilità:

a) che un nuovo assicurato subisca un incidente durante l'anno di validità della polizza?

b) che un nuovo assicurato sia predisposto se durante l'anno di validità della polizza subisce un incidente?

$A = \{\text{PREDISPOSTO}\}$

$B = \{\text{SUBISCE INCIDENTE}\}$

$\mathbb{P}[B|A] = 0.4$

$\mathbb{P}[B|A^c] = 0.2$

$\mathbb{P}[A] = 0.3$

a) $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B|A^c]\mathbb{P}[A^c] =$

$= 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.12 + 0.14 = 0.26$

b) $\mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = \dfrac{0.4 \cdot 0.3}{0.26} = \dfrac{6}{13} \simeq 0.4615$

Esercizio 8: (# 1.22 pag. 47 – Cicchitelli II ed.)
Il virus Ebola è presente in una certa popolazione nella proporzione dello 0.5 per mille. Per evitare la diffusione dell'epidemia all'estero, chiunque intenda lasciare il paese deve sottoporsi ad un test che ha una affidabilità del 95% in presenza della malattia e dell'85% in sua assenza. Si determini:
a) la probabilità che il test indichi la presenza della malattia
b) la probabilità che l'individuo sia malato se il test indica che lo è

$S = \{SANO\}$ $\quad \mathbb{P}[M] = 0.0005$

$M = \{MALATO\}$ $\quad \mathbb{P}[T_+ | M] = 0.95$

$T_+ = \{TEST\ +\}$ $\quad \mathbb{P}[T_- | S] = 0.85$

$T_- = \{TEST\ -\}$

a) $\mathbb{P}[T_+] = \mathbb{P}[T_+ | S]\,\mathbb{P}[S] + \mathbb{P}[T_+ | M]\,\mathbb{P}[M] =$

$= (1 - 0.85)(1 - 0.0005) + 0.95 \cdot 0.0005 =$

$= 0.15 \cdot 0.9995 + 0.95 \cdot 0.0005 = 0.1504$

b) $\mathbb{P}[M | T_+] = \dfrac{\mathbb{P}[T_+ | M]\,\mathbb{P}[M]}{\mathbb{P}[T_+]} = \dfrac{0.95 \cdot 0.0005}{0.1504} \simeq 0.00316$

$\mathbb{P}[S | T_-] = ?$

Esercizio 2
Lo 0.1% della popolazione di una città ha la tubercolosi (TBC). Si costruisce un test con le seguenti caratteristiche: se una persona ha la TBC il test fornisce esito positivo con probabilità 0.999, se invece è sana, comunque il test risulta (erroneamente) positivo con probabilità 0.002. Se un cittadino risulta positivo al test, quale è la probabilità che sia realmente affetto da TBC?

$T_+ = \{\text{TEST POSITIVO}\}$ $\quad S = \{\text{PAZIENTE SANO}\}$

$T_- = \{\text{TEST NEGATIVO}\}$ $\quad M = \{\text{PAZ. MALATO}\}$

$T_- = T_+^C$ $\quad S = M^C$

$$\mathbb{P}[M] = 0.001$$
$$\mathbb{P}[S] = 0.999$$
$$\mathbb{P}[T_+ | M] = 0.999$$
$$\mathbb{P}[T_+ | S] = 0.002$$

$$\mathbb{P}[M | T_+] = \frac{\mathbb{P}[T_+ | M]\,\mathbb{P}[M]}{\mathbb{P}[T_+ | M]\,\mathbb{P}[M] + \mathbb{P}[T_+ | S]\,\mathbb{P}[S]} = \frac{\cancel{0.999} \cdot 0.001}{\cancel{0.999} \cdot 0.001 + 0.002 \cdot \cancel{0.999}} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 8 *In un gioco televisivo viene messo in palio un 1 milione di euro. Per vincerlo il concorrente dovrà indovinare fra tre buste qual è quella che contiene l'assegno. Il concorrente sceglie a caso una busta; a questo punto il conduttore mostra una delle due buste che sa essere vuota, offrendo al concorrente di cambiare la propria busta con quella rimanente.*
Qual è la probabilità di vincere il premio conservando la prima busta scelta?
Qual è la probabilità di vincere cambiando la busta?
Qual è la probabilità di vincere se gioca a testa e croce fra le due strategie?

$A = \{\text{BUSTA CON ASSEGNO}\}$

$A^c = \{\text{BUSTA VUOTA}\}$

$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}[A^c] = \frac{2}{3}$

$V = \{\text{VITTORIA!}\}$

$$\mathbb{P}[V] = \mathbb{P}[V|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[V|A^c]\,\mathbb{P}[A^c]$$

(a) TENGO LA BUSTA

$\mathbb{P}[V|A] = 1 \; ; \; \mathbb{P}[V|A^c] = 0$

$\mathbb{P}[V] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(b) CAMBIO LA BUSTA

$\mathbb{P}[V|A] = 0 \; ; \; \mathbb{P}[V|A^c] = 1$

$\mathbb{P}[V] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ORA SIA $T = \{\text{TENGO LA BUSTA}\}$ E $C = \{\text{CAMBIO LA BUSTA}\}$

$$\mathbb{P}[V] = \mathbb{P}[V|T]\,\mathbb{P}[T] + \mathbb{P}[V|C]\,\mathbb{P}[C]$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Abbiamo due urne, l'urna **A** e l'urna **B**. L'urna **A** contiene tre palline nere e due palline bianche; l'urna **B** contiene due palline nere e tre palline bianche. Procediamo ad una estrazione nel seguente modo: lanciamo un dado e se esce 1 oppure 2 peschiamo dall'urna **A**, se esce un altro numero peschiamo dall'urna **B**.

Qual è la probabilità di pescare una pallina nera?

$N_A = 3 \quad W_A = 2$

$N_B = 2 \quad W_B = 3$

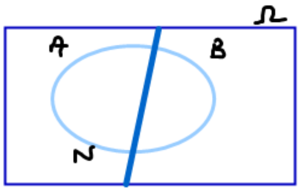
$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$

$N = \{\text{NERA}\} \quad W = \{\text{BIANCO}\}$

$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}[B] = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}[N|A] = \frac{3}{5} \qquad \mathbb{P}[N|B] = \frac{2}{5}$

$$\mathbb{P}[N] = \mathbb{P}[N \cap A] + \mathbb{P}[N \cap B] = \mathbb{P}[N|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[N|B]\,\mathbb{P}[B] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$



$N = (N \cap A) \cup (N \cap B)$