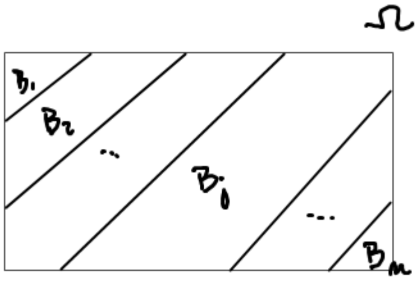


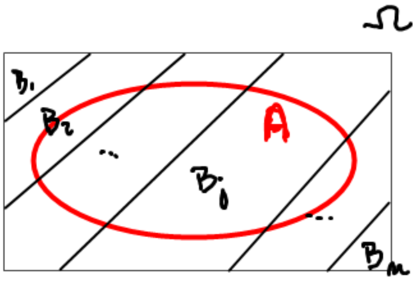
LA FAMIGLIA DI INSIEMI $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ FORMA UNA COPERTURA DI Ω SSE $\forall\, \omega \in \Omega \;\; \exists\, i = 1, \dots, m$ T.C. $\omega \in B_i$ (OGNI PUNTO DI Ω APPARTIENE AD ALMENO UNO DEI B_i)

UNA COPERTURA SI DICE PARTIZIONE SSE $\forall\, i, j = 1, \dots, m$ CON $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \emptyset$

IL TH. DELLE PROBABILITÀ TOTALI RICHIEDE CHE I B_i NON SIANO QUALSIASI MA SIANO UNA PARTIZIONE DI Ω

IL TH. DELLE PROBABILITÀ TOTALI DETTO ANCHE TH. DELLO SPINACINO ALL'UOVO AFFERMA CHE LA PROBABILITÀ DI TROVARE L'UOVO IN UNO SPINACINO È DATO DALLA SOMMA, ESTESA A TUTTE LE FETTE, DELLE PROBABILITÀ DI TROVARE UOVO IN UNA FETTA MOLTIPLICATA PER LA PROBABILITÀ DI SCEGLIERE QUELLA FETTA:

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[A \mid B_j]\, \mathbb{P}[B_j]$$



Esercizio 4

Un ingegnere è sottoposto ad un colloquio per un posto di analista in una grande agenzia di viaggi. Durante il colloquio l'esaminatore chiede all'ingegnere di essere relazionato in merito agli esiti di una indagine di mercato svolta tra i clienti dell'agenzia.

L'indagine classifica i clienti in base a combinazioni dei seguenti eventi elementari:

A={il cliente gradisce il mare}
B={il cliente gradisce i monti}
C={il cliente gradisce viaggiare}

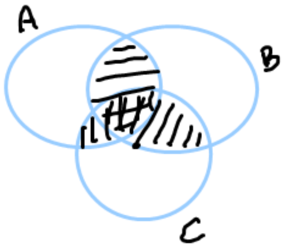
L'ingegnere elabora la tabella qui a fianco ma, subito dopo la lettura, l'esaminatore decide di non assumere l'ingegnere. Perché?

Preferenza	Evento	$P(\cdot)$
mare, monti, viaggi	$A\cap B\cap C$	0.01
mari e monti	$A\cap B$	0.12
mare e viaggi	$A\cap C$	0.04
monti e viaggi	$B\cap C$	0.03
mare	A	0.53
monti	B	0.38
viaggi	C	0.55

APPROCCIO FREQUENTISTA: COME VALORI DI PROBABILITÀ VENGONO UTILIZZATE LE FREQUENZE RELATIVE EMERSE NEL SONDAGGIO.

POICHÉ

$$\begin{cases} A\cup B\cup C = S \\ \mathbb{P}(S) = 1 \end{cases}$$



$$\mathbb{P}[A\cup B\cup C]=\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[A\cap B]-\mathbb{P}[A\cap C]-\mathbb{P}[B\cap C]+\mathbb{P}[A\cap B\cap C]$$

$$= \underbrace{0.53+0.38+0.55}_{1.46}\underbrace{-0.12-0.04-0.03}_{-0.19}+0.01 =$$

$$\begin{array}{r} 1.46 \\ 0.01 \\ \hline 1.47 \end{array}$$

$$1.47 - 0.19 = 1.28 > 1 \;!!!$$

Esercizio 5:
Due eventi indipendenti A e B sono tali che P[A∪B]=0.75 e P[A]=P[B].
Quanto vale P[A]? Quanto vale P[A∩B]?

SIA $p = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B]$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = p^2$$

$$0.75 = \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B] =$$
$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] =$$
$$= p + p - p^2$$

$$p^2 - 2p + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 4 - 3 = 1$$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{2} = \begin{cases} \cancel{3/2} > 1 \Rightarrow \text{N.A.} \\ 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A) = p = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Esercizio 6:
Si effettuano 3 tiri successivi ed indipendenti ad un bersaglio. Le probabilità di colpire il bersaglio al primo, al secondo e al terzo colpo sono rispettivamente pari a 0.6 0.7 e 0.8. Calcolare la probabilità di colpire il bersaglio una sola volta.

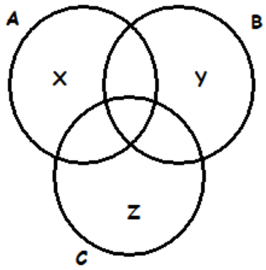


Diagramma di Venn

$A = \{\text{CENTRO AL } 1^\circ \text{ TIRO}\}$ $X = \{\text{SOLO AL } 1^\circ \text{ TIRO}\}$

$B = \{\text{CENTRO AL } 2^\circ \text{ TIRO}\}$ $Y = \{\text{SOLO AL } 2^\circ\}$

$C = \{\text{CENTRO AL } 3^\circ \text{ TIRO}\}$ $Z = \{\text{SOLO AL } 3^\circ\}$

$W = \{\text{SOLO UN CENTRO}\}$ $W = X \cup Y \cup Z$ $X = AB^cC^c$ $Y = A^cBC^c$ $Z = A^cB^cC$

$\mathbb{P}[A] = 0.6$ $\mathbb{P}[B] = 0.7$ $\mathbb{P}[C] = 0.8$

$\mathbb{P}[X] = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.036$ $\mathbb{P}[Y] = 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 0.056$ $\mathbb{P}[Z] = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.096$

$\mathbb{P}[W] = \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y] + \mathbb{P}[Z] = 0.188$

NOTA:

- $\mathbb{P}[W] = \mathbb{P}[X] + \mathbb{P}[Y] + \mathbb{P}[Z]$ PERCHÈ X, Y, Z SONO INCOMPATIBILI
- $\mathbb{P}[X] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B^c]\,\mathbb{P}[C^c]$ (E COSÌ ANCHE Y E Z) PERCHÈ A, B, C SONO INDIPENDENTI
- IL CONCETTO DI "CENTRO AL PRIMO TIRO" È NETTAMENTE DIVERSO DA "CENTRO <u>SOLO</u> AL 1° TIRO"!

Esercizio 1
Un'inchiesta sulla popolazione di una certa città ha fornito i seguenti dati: il 10% della popolazione è ricco, il 5% è famoso e il 3% è ricco e famoso. Per una persona scelta a caso da suddetta popolazione,

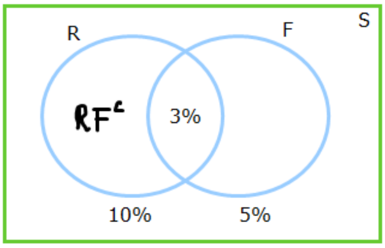
(a) qual è la probabilità che la persona non sia ricca?

(b) Qual è la probabilità che sia ricca ma non famosa?

(c) Qual è la probabilità che sia ricca o famosa?

(d) Se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa sia anche ricca?

(e) Se la persona è famosa, qual è la probabilità che essa non sia ricca?



$\mathbb{P}[R] = 0.1 \qquad \mathbb{P}[F] = 0.05 \qquad \mathbb{P}[RF] = 0.03$

(a) $\mathbb{P}[R^c] = 1 - \mathbb{P}[R] = 0.9$

(b) $\mathbb{P}[RF^c] = \mathbb{P}[R] - \mathbb{P}[RF] = 0.1 - 0.03 = 0.07$

(c) $\mathbb{P}[R \cup F] = \mathbb{P}[R] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[RF] = 0.1 + 0.05 - 0.03 = 0.12$

(d) $\mathbb{P}[R|F] = \dfrac{\mathbb{P}[RF]}{\mathbb{P}[F]} = \dfrac{0.03}{0.05} = 0.6$ (e) $\mathbb{P}[R^c|F] = 1 - \mathbb{P}[R|F] = 0.4$

NOTA: POICHE' $RF \cap RF^c = \emptyset$ E $R = RF \cup RF^c$ ABBIAMO $\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[RF \cup RF^c] = \mathbb{P}[RF] + \mathbb{P}[RF^c]$
DA CUI $\mathbb{P}[RF^c] = \mathbb{P}[R] - \mathbb{P}[RF]$

Osserviamo che le probabilità totali possono essere inserite in una matrice in cui la somma estesa a tutti i suoi elementi è pari a 1:

	F	F^c	Tot
R	$p(R \cap F)$	$p(R \cap F^c)$	$p(R)$
R^c	$p(R^c \cap F)$	$p(R^c \cap F^c)$	$p(R^c)$
Tot	$p(F)$	$p(F^c)$	$\mathbf{p(\Omega)}$

	F	F^c	Tot
R	0.03	0.07	0.10
R^c	0.02	0.88	0.90
Tot	0.05	0.95	**1.00**

Anche le probabilità condizionate possono essere inserite in una matrice ma, in questo caso, saranno pari a 1 le somme estese alle singole righe (o, equivalentemente, colonne):

	F	F^c	Tot
R	$p(R\|F)$	$p(R\|F^c)$	/
R^c	$p(R^c\|F)$	$p(R^c\|F^c)$	/
Tot	$\mathbf{p(\Omega\|F)}$	$\mathbf{p(\Omega\|F^c)}$	/

	F	F^c	Tot
R	0.60	0.074	/
R^c	0.40	0.926	/
Tot	**1.00**	**1.00**	/

	F	F^c	Tot
R	$p(F\|R)$	$p(F^c\|R)$	$\mathbf{p(\Omega\|R)}$
R^c	$p(F\|R^c)$	$p(F^c\|R^c)$	$\mathbf{p(\Omega\|R^c)}$
Tot	/	/	/

	F	F^c	Tot
R	0.30	0.70	**1.00**
R^c	0.022	0.978	**1.00**
Tot	/	/	/

Esercizio 4
Assegnate le probabilità $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.6$ determinare $P(B)$ nelle seguenti ipotesi alternative:

(a) A e B sono incompatibili

(b) A e B sono indipendenti

(c) $P(A \mid B) = 0.4$.

$$\to \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B]}_{X} - \mathbb{P}[A \cap B]$$

a) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 \to 0.6 = 0.5 + X \Rightarrow X = 0.1$

b) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$

$= 0.5X \to 0.6 = 0.5 + X - 0.5X$

$0.1 = \frac{1}{2}X \qquad X = 0.2$

c) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \mid B]\,\mathbb{P}[B]$

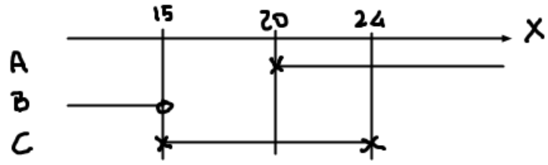
$= 0.4X \to 0.6 = 0.5 + X - 0.4X$

$0.1 = 0.6X$

$X = \frac{1}{6}$

Esercizio 5 *Per misurare accuratamente dei pesi viene usata una scala digitale. Sia X la variabile aleatoria che indica la misurazione fatta usando questa scala e si considerino i seguenti intervalli di valori di misurazione:*

- A : *peso supera i 20 grammi*
- B : *peso è inferiore o uguale a 15 grammi*
- C : *peso è compreso tra 15 e 24 grammi (estremi esclusi).*



Si conoscono le seguenti probabilità:

$P(X \in A) = 0.5$
$P(X \in B) = 0.3$
$P(X \in C) = 0.6$

a) *A e B sono mutuamente disgiunti? B e C? A e C?*

b) *Descrivere A^c e determinarne la probabilità.*

c) *Descrivere C^c e determinarne la probabilità.*

d) *Determinare $P(15 < X \leq 20)$.*

$A \cap B = \emptyset$ SI
$B \cap C = \emptyset$ SI
$A \cap C \neq \emptyset$ NO

$$A = \{X > 20\} \qquad B = \{X \leq 15\} \qquad C = \{15 < X < 24\}$$

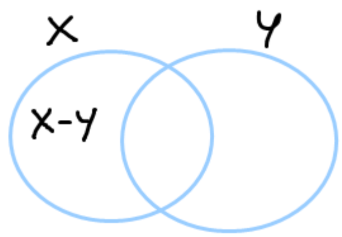
$$A^c = \{X \leq 20\} \text{ E } \mathbb{P}[A^c] = 1 - 0.5 = 0.5 \qquad C^c = \{X \leq 15 \vee X \geq 24\} \text{ E } \mathbb{P}[C^c] = 0.4$$

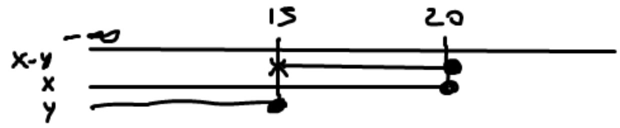
$$\mathbb{P}[15 < X \leq 20] = \mathbb{P}[A^c - B] = \mathbb{P}[A^c] - \mathbb{P}[B] = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

$$\{15 < X \leq 20\} = \{X \leq 20\} - \{X \leq 15\} = A^c - B$$

RICORDIAMO CHE:

$$X - Y = X \cap Y^c$$





X-Y È LA PARTE DI X CHE NON STA IN Y

Esercizio 6 *Siano A, B e C insiemi a due a due disgiunti con* $\mathbb{P}[X \cap Y] = \emptyset$

$P(X \in A) = 0.2$
$P(X \in B) = 0.3$
$P(X \in C) = 0.5$

Determinare:

$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

a) $P(X \in A^c) = 1 - 0.2 = 0.8$

b) $P(X \in B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$

c) $P(X \in C^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

d) $P(X \in A \cup B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$

e) $P(X \in A \cup C) = 0.2 + 0.5 = 0.7$

Esercizio 7 *Sia X la durata (in ore) di un laser semiconduttore con le seguenti probabilità:*

$P(X \leq 5000) = 0.05$
$P(5000 < X \leq 7000) = 0.5$
$P(X > 7000) = 0.45$

a) *Determinare* $P(X \leq 7000)$

b) *Determinare* $P(X > 5000)$

c) *Supponiamo ora che ci siano tre laser indipendenti tutti soddisfacenti le ipotesi precedenti. Calcolare:*

1) *la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 7000 ore;*
2) *la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 5000 ore;*
3) *nessuno dei tre laser funzioni per più di 7000 ore.*

a) $\mathbb{P}[X \leq 7000] = 1 - \mathbb{P}[X > 7000] =$
$= 1 - 0.45 = 0.55$

b) $\mathbb{P}[X > 5000] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 5000] =$
$= 1 - 0.05 = 0.95$

c) $X_1 \quad X_2 \quad X_3$ DURATA DEI TRE LASER INDIPENDENTI

I TRE LASER SONO INDIPENDENTI E TUTTI SODDISFANO LE MEDESIME IPOTESI PERTANTO

$$\mathbb{P}[X_1 \cap X_2 \cap X_3] = \mathbb{P}[X_1]\,\mathbb{P}[X_2]\,\mathbb{P}[X_3] = (\mathbb{P}[X])^3$$

c1) $(\mathbb{P}[X > 7000])^3 = (0.45)^3$

c2) $(\mathbb{P}[X > 5000])^3 = (0.95)^3$

c3) NESSUN LASER DURA PIÙ DI 7000 ORE SIGNIFICA TUTTI DURANO MENO DI 7000 ORE

QUINDI $(\mathbb{P}[X < 7000])^3 = (0.55)^3$

ATTENZIONE:

$\{$TUTTI I LASER FUNZIONANO PIÙ DI 7000 ORE$\}^c = \{$ALMENO UN LASER FUNZIONA MENO DI 7000 ORE$\}$
$\neq \{$NESSUN LASER DURA PIÙ DI 7000 ORE$\}$

QUINDI È SBAGLIATO CALCOLARE c3) COME $1 - (\mathbb{P}[X > 7000])^3$

Un'urna contiene 20 palline, 5 rosse, 5 bianche, 5 blu e 5 verdi. Estraiamo (con reimmissione) 3 palline. Determinare:

a. la probabilità di estrarre 3 rosse;

b. la probabilità di estrarre 3 palline dello stesso colore;

c. la probabilità di estrarre 3 palline di 3 colori diversi.

REIMMISSIONE $\Rightarrow$ INDIPENDENZA

$$\{I_j = x\} = \{\text{IL COLORE DELLA } j\text{-ESIMA PALLINA ESTRATTA È } x\}$$

$$j = 1, 2, 3 \qquad x = R, W, B, G$$

$$\mathbb{P}[I_j = x] = \frac{1}{4} \quad \forall j = 1, 2, 3$$

PER L'INDIPENDENZA

(a) $$\mathbb{P}[I_1 = I_2 = I_3 = R] = \mathbb{P}[I_1 = R \cap I_2 = R \cap I_3 = R] = (\mathbb{P}[I_j = R])^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

(b) $$\mathbb{P}[I_1 = I_2 = I_3] = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}[I_1 = I_2 = I_3 = x_i] = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

(c) $$\mathbb{P}[I_3 \neq I_2 \cap I_3 \neq I_1 \cap I_2 \neq I_1] = \mathbb{P}[I_3 \neq I_2 \cap I_3 \neq I_1 \mid I_2 \neq I_1] \cdot \mathbb{P}[I_2 \neq I_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

PER IL TH. DELLE PROBABILITÀ TOTALI

ESSENDO $$\mathbb{P}[I_2 \neq I_1] = \frac{\#\text{ fav.}}{\#\text{ poss.}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

E $$\mathbb{P}[I_3 \neq I_2, I_3 \neq I_1 \mid I_2 \neq I_1] = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Ho un'urna con n palline numerate da 1 a n. Estraggo una pallina, mi annoto il numero e la rimetto nell'urna. Ripeto k volte. Qual è la probabilità che venga estratto (almeno) due volte lo stesso numero?

1. Rispondere nel caso $k > n$.
2. Rispondere nel caso $k \leq n$ (suggerimento: è più facile calcolare la probabilità del complementare).

$I = \{1, \dots, n\}$ $\qquad \Omega = I^k$

$A_k = \{$ tra le k estrazioni ce ne sono almeno 2 identiche $\}$

$A_k^c = \{$ le k estrazioni sono tutte distinte $\}$

Per $k > n$ (estrazioni superiori al n° di palline ergo non possono essere tutte diverse) $\quad \mathbb{P}[A_1] = 0 \quad \mathbb{P}[A_k] = 1$

SIA $1 < k \leq n$

OSSERVIAMO CHE $\mathbb{P}[A_k^c \mid A_{k-1}^c] \overset{\text{CASI FAV. SU CASI POSS.}}{=} \dfrac{n-k+1}{n}$ DOVE $A_k^c \mid A_{k-1}^c$ SIGNIFICA k PALLINE DISTINTE DATO CHE LE PRECEDENTI $k-1$ PALLINE ERANO DISTINTE.

INOLTRE $A_k^c \Rightarrow A_{k-1}^c$ PERCHÉ SE k PALLINE SONO DISTINTE, A MAGGIOR RAGIONE LO SONO $k-1$ DUNQUE $A_k^c \subset A_{k-1}^c$ DA CUI

$A_k^c = A_k^c \cap A_{k-1}^c$ PERTANTO

$$\mathbb{P}[A_k^c] = \mathbb{P}[A_k^c \cap A_{k-1}^c] = \mathbb{P}[A_k^c \mid A_{k-1}^c] \cdot \mathbb{P}[A_{k-1}] =$$

$$= \mathbb{P}[A_k^c \mid A_{k-1}^c] \cdots \mathbb{P}[A_2^c \mid A_1^c]\,\mathbb{P}[A_1^c] = \frac{n-k+1}{n}\,\frac{n-k}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}$$

RIASSUMENDO: $$\mathbb{P}[A_k] = \begin{cases} 1 - \dfrac{n!}{(n-k)!\, n^k} & \text{se } 1 \leq k \leq n \\ 1 & \text{se } k > n \end{cases}$$

Esercizio 2.1. *Siano A e B due eventi incompatibili tali che $P(A) = 0,25$ e $P(A \cup B) = 0,75$. Quanto vale $P(B)$? e se invece A e B sono indipendenti?*

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

1. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}[A \cap B] = 0 \Rightarrow 0.75 = 0.25 + \mathbb{P}[B] \Rightarrow \mathbb{P}[B] = 0.5$

2. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] \Rightarrow 0.75 = 0.25 + \mathbb{P}[B] - 0.25\,\mathbb{P}[B] \Rightarrow \mathbb{P}[B] = \frac{0.5}{0.75} = \frac{2}{3}$

Esercizio 2.3. *Viene estratto un numero da 1 a 15. Se sappiamo che il numero estratto é divisibile per 3, qual e' la probabilità che sia pari? E che sia dispari? Gli eventi "pari" e "divisibile per 3" sono indipendenti?*

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B = {2k}		2		4		6		8		10		12		14	
A = {3k}			3			6			9			12			15
AB						6						12			

A = { il n° estratto è divisibile per 3 }

B = { il n° estratto è pari }

$\mathbb{P}[A] = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}[A^c] = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}[B] = \frac{7}{15} \qquad \mathbb{P}[B^c] = \frac{8}{15}$

$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{2}{15} \qquad \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$

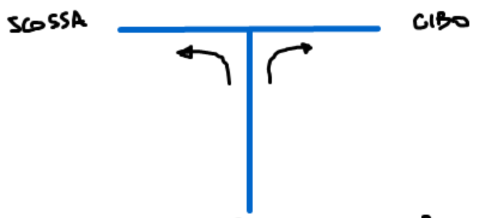
a) $\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{2/15}{5/15} = \frac{2}{5}$

b) $\mathbb{P}[B^c|A] = 1 - \mathbb{P}[B|A] = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5} = \mathbb{P}[B|A] \neq \mathbb{P}[B] = \frac{7}{15}$

Esercizio 3.2. *In un labirinto a T, ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a destra e ricevere cibo o a sinistra e ricevere una piccola scossa. Al primo tentativo si assume che la probabilità di andare a destra o sinistra sia uguale. Dopo aver ricevuto il cibo le probabilità diventano 0,4 di andare a sinistra e 0,6 di andare a destra. Dopo aver ricevuto la scossa diventano invece 0,2 e 0,8 rispettivamente.*

(1) *Qual é la probabilità che vada a destra al secondo tentativo?*
(2) *e al numero 3?*



$A_1 = \{$VADO A DESTRA AL TENTATIVO 1$\}$

$\mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{2}$

$A_2 = \{$VADO A DX AL TENT. 2$\}$

$\mathbb{P}[A_2 | A_1] = 0.6$

$\mathbb{P}[A_2 | A_1^c] = 0.8$

VALGONO AD OGNI STEP:

$$\begin{cases} \mathbb{P}[A_{i+1} | A_i] = 0{,}6 \\ \mathbb{P}[A_{i+1} | A_i^c] = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[A_2] = \mathbb{P}[A_2|A_1]\,\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2|A_1^c]\,\mathbb{P}[A_1^c] =$$
$$= 0.6 \cdot \frac{1}{2} + 0.8 \cdot \frac{1}{2} = 0.7$$

SENZA MEMORIA

$$\mathbb{P}[A_3] = \underset{0.6}{\mathbb{P}[A_3|A_2]}\,\underset{0.7}{\mathbb{P}[A_2]} + \underset{0.8}{\mathbb{P}[A_3|A_2^c]}\,\underset{0.3}{\mathbb{P}[A_2^c]} = 0.66$$

CON MEMORIA

$$\mathbb{P}[A_3] = \mathbb{P}[A_3|A_2A_1]\,\mathbb{P}[A_2A_1] + \mathbb{P}[A_3|A_2A_1^c]\,\mathbb{P}[A_2A_1^c] + \mathbb{P}[A_3|A_2^cA_1]\,\mathbb{P}[A_2^cA_1] +$$
$$+ \mathbb{P}[A_3|A_2^cA_1^c]\,\mathbb{P}[A_2^cA_1^c] =$$
$$= 0.6\,\mathbb{P}[A_2|A_1]\,\mathbb{P}[A_1] + 0.8\,\mathbb{P}[A_2|A_1^c]\,\mathbb{P}[A_1^c] + 0.8\,\mathbb{P}[A_2^c|A_1]\,\mathbb{P}[A_1] + 0.8\,\mathbb{P}[A_2^c|A_1^c]\,\mathbb{P}[A_1^c] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.2\right) = (0.36 + 0.64 + 0.32 + 0.16)\frac{1}{2} =$$
$$= (1.48)\frac{1}{2} = 0.74$$

$$\mathbb{P}[A_{i+1} | A] = \begin{cases} 0{,}6 & \text{SE } A = A_i \cap A_{i-1} \cap \dots \cap A_1 \\ 0{,}8 & \text{SE IN } A \text{ COMPARE ALMENO UN } A_k^c \end{cases}$$

IL TOPO NON HA MAI PRESO LA SCOSSA

L'HA PRESA ALMENO UNA VOLTA

Teorema di Bayes (Michael Mitzenmacher, Probabability and computing. Pag. 10)

Siano date tre monete due delle quali bilanciate ed una truccata in modo che esca testa con probabilità 2/3. Quale sia la moneta truccata non è noto.
Mischiamo a caso le tre monete e le lanciamo con esito Testa per le prime due monete e Croce per la terza.

Qual è la probabilità che ad essere truccata sia la prima moneta?

$E_i = \{$ LA MONETA i ESIMA È TRUCCATA $\}$

$T_i = \{$ AL LANCIO i-ESIMO È USCITO TESTA $\}$ $\quad C_i = T_i^c = \{$ CROCE ... $\}$

$B = \{T_1 T_2 C_3\} = \{T_1\} \cap \{T_2\} \cap \{C_3\}$

NOTA (1): T_1, T_2, C_3 NON SONO INDIPENDENTI MA LO SONO

$T_1 | E_i \;,\; T_2 | E_i \;,\; T_3 | E_i$

$\mathbb{P}[E_i] = \frac{1}{3} \quad \forall i = 1, 2, 3$

NOTA: GLI E_i FORMANO UNA PARTIZIONE $\Rightarrow$ POSSO USARE BAYES E TH. PROB. TOT.

$$\mathbb{P}[T_i | E_j] = \begin{cases} 2/3 & i = j \\ 1/2 & i \neq j \end{cases}$$

$\mathbb{P}[T_1 | E_1] = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}[T_2 | E_1] = \mathbb{P}[C_3 | E_1] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[B | E_1] = \mathbb{P}[T_1 T_2 C_3 | E_1] \overset{(1)}{=}$

$= \mathbb{P}[T_1 | E_1] \cdot \mathbb{P}[T_2 | E_1] \cdot \mathbb{P}[C_3 | E_1] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12}$

$\mathbb{P}[B | E_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12} \qquad \mathbb{P}[B | E_3] = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$$\mathbb{P}[E_1 | B] = \frac{\mathbb{P}[B | E_1] \mathbb{P}[E_1]}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[B | E_i] \mathbb{P}[E_i]} =$$

$$= \frac{2/12 \cdot 1/3}{2/12 \cdot 1/3 + 2/12 \cdot 1/3 + 1/12 \cdot 1/3} = \frac{2}{5}$$

$T_1 \quad T_2 \quad C_3$ NON SONO INDIPENDENTI

$$\mathbb{P}[T_1] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[T_1 | E_i]\,\mathbb{P}[E_i] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9}$$

$$\mathbb{P}[C_3] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[C_3 | E_i]\,\mathbb{P}[E_i] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}[T_1 C_3] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[T_1 C_3 | E_i]\,\mathbb{P}[E_i] \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[T_1 | E_i]\,\mathbb{P}[C_3 | E_i]\,\mathbb{P}[E_i] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{9}{12} = \frac{1}{4}$$

$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9} \neq \frac{1}{4}$ $\qquad$ T_1 e C_3 NON SONO INDIPENDENTI

(*) PASSAGGIO VALIDO SOTTO L'IPOTESI CHE $T_1 | E_i$ E $C_3 | E_i$ SIANO INDIPENDENTI IL CHE RISULTA OVVIO NOTANDO CHE IL VERIFICARSI DI E_i COMPORTA SAPERE QUALE SIA LA MONETA TRUCCATA E I LANCI DI MONETE SONO INDIPENDENTI SE SONO NOTI I RISPETTIVI PESI p_i