Esercizi sui numeri complessi

1. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

1. $z = \dfrac{7+i}{4-i}$ (R. $z = \dfrac{27}{17} + \dfrac{11}{17}i$)
2. $z = \dfrac{(1+2i)^3}{(2+i)^3}$ (R. $z = -\dfrac{44}{125} + \dfrac{117}{125}i$)
3. $z = \left(\dfrac{1+2i}{1+i}\right)^4$ (R. $z = \dfrac{7}{4} + 6i$)
4. $z = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$ (R. $z = -2\sqrt{6} + i$)

2. Determinare e disegnare il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che:

1. $|z| = |z+i|$ (R. $z = x - \dfrac{1}{2}i$, è una retta parallela all'asse x)
2. $Re(z^2) > 2$ (R. $z = x+iy, x^2 - y^2 > 2$ è la zona esterna ai due rami di iperbole)
3. $Im\left(\dfrac{1}{z}\right) = -1$ (R. $z = x+iy, x^2 + y^2 - y = 0$, è la circonferenza di centro $(0, \dfrac{1}{2})$ e raggio $\dfrac{1}{2}$)
4. $0 \le Re(iz) \le 2\pi$ (R. $z = x+iy, -2\pi \le y \le 0$, è la zona compresa tra le rette $y = 0$ e $y = -2\pi$)

3. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $|z-i| = |z+2|$ (R. $z = x + i(-\dfrac{3}{2} - 2x)$)
2. $|z-i||z| = |z-i|^2$ (R. $z = i, z = x + \dfrac{1}{2}i$)
3. $z^2 + z\bar{z} = 3+2i$ (R. $z = \sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}i,\ z = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}i$)
4. $z^2 + \bar{z} = 0$ (R. $z = 0, z = -1, z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$)

4. Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

1. $z = -3i$ (R. $|z| = 3, \arg(z) = -\dfrac{1}{2}\pi$)
2. $z = 1-i$ (R. $|z| = \sqrt{2}, \arg(z) = -\dfrac{1}{4}\pi$)
3. $z = -1+\sqrt{3}i$ (R. $|z| = 2, \arg(z) = \dfrac{2}{3}\pi$)

4. $z = -\sqrt{3} + i \quad$ (R. $|z| = 2, \arg(z) = \dfrac{5}{6}\pi$)

5. $z = -2 + i \quad$ (R. $|z| = \sqrt{5}, \arg(z) = -\arctan\dfrac{1}{2} + \pi$)

5. Utilizzando la formula di De Moivre, determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

1. $z = \dfrac{1+i}{1-i} \quad$ (R. $|z| = 1, \arg(z) = -\pi$)
2. $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} \quad$ (R. $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \arg(z) = \dfrac{1}{12}\pi$)
3. $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \quad$ (R. $|z| = \sqrt{2}, \arg(z) = \dfrac{7}{12}\pi$)

6. Dopo aver scritto in forma algebrica i numeri complessi $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ e $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$, calcolare, tenendo conto dell'esercizio precedente, $\tan\dfrac{1}{12}\pi$ e $\tan\dfrac{7}{12}\pi$.

(R. $= \tan\dfrac{1}{12}\pi = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \ \tan\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$)

7. Utilizzando la formula di De Moivre, scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

1. $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 \quad$ (R. $z = i$)
2. $z = (1+i)^{20}$ (R. $z = -2^{10}$)
3. $z = (1+\sqrt{3}i)^n - (1-\sqrt{3}i)^n$ (R. $z = 2^{n+1}\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$i)

8. Verificare che $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6 = -1 \quad$ (R. Se $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $|z^6| = 1$ e $\arg(z^6) = \pi$)

9. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $z^3 = \bar{z}^2 \quad$ (R. $z = 0, z = \cos\dfrac{2k\pi}{5} + i\sin\dfrac{2k\pi}{5}, 0 \le k \le 4$)
2. $z^3 - |z| = 0 \quad$ (R. $z = 0, z = 1, z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$)
3. $iz^3 = \bar{z} \quad$ (R. $z = 0, z = \cos\dfrac{4k\pi - \pi}{8} + i\sin\dfrac{4k\pi - \pi}{8}, 0 \le k \le 3$)
4. $2|z|^2 = z^3 \quad$ (R. $z = 0, z = 2, z = -1 \pm \sqrt{3}i$)

10. Calcolare le seguenti radici:

1. $\sqrt[3]{i-1}$ (R. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right), 0\le k\le 2$)

2. $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$ (R. $\pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$)

3. $\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$ (R. $\pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$)

4. $\sqrt[5]{1+i}$ (R. $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{20}\right), 0\le k\le 4$)

5.$\sqrt[6]{-1}$ (R. $\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}, 0\le k\le 5$)

11. Risolvere le seguenti equazioni

1. $(z-2)^3=-i$ (R. $z=2+i, z=2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, z=2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$)
2. $z^2-(4+i)z+4+2i=0$ (R. $z=2+i, z=2$)

3.$z^2+2iz-\sqrt{3}i=0$ (R. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)i,\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)i$)

4.$z^4-(1+i)z^2+i=0$ ($R.z=\pm 1,\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$)

12. Si disegnino sul piano di Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi: $A=\left\{z\in\mathbb{C}:1\le|z|<4, 0\le\arg(z)<\frac{2\pi}{3}\right\}$, $B=\{w\in\mathbb{C}:w=(\sqrt{3}-i)z, z\in A\}$, $C=\{v\in\mathbb{C}:v=w^2, w\in B\}$. (R. $2\le|w|<8, -\frac{\pi}{6}\le\arg(w)<\frac{\pi}{2},\ 4\le|v|<64, -\frac{\pi}{3}\le\arg(v)<\pi$)

13. Si disegnino sul piano di Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi: $A=\left\{z\in\mathbb{C}:1\le|z|\le 2, 0\le\arg(z)<\frac{\pi}{3}\right\}$, $B=\{w\in\mathbb{C}:w=z^3, z\in A\}$, $C=\{v\in\mathbb{C}:v=\sqrt[4]{z}, z\in B\}$. (R. $1\le|w|\le 8, 0\le\arg(w)<\pi,\ 1\le|v|\le\sqrt[4]{2}, \frac{k\pi}{2}\le\arg(v)\le\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,3$)

14. Scomporre in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}$ il polinomio $P(z)=4z^4+9$.

(R. $P(z)=4\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}(-1+i)\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}(-1-i)\right)$,
$P(x)=4\left(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2}\right)$)