Michela Eleuteri

ANALISI MATEMATICA

Appunti di algebra lineare

Spazi vettoriali

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Spazi vettoriali

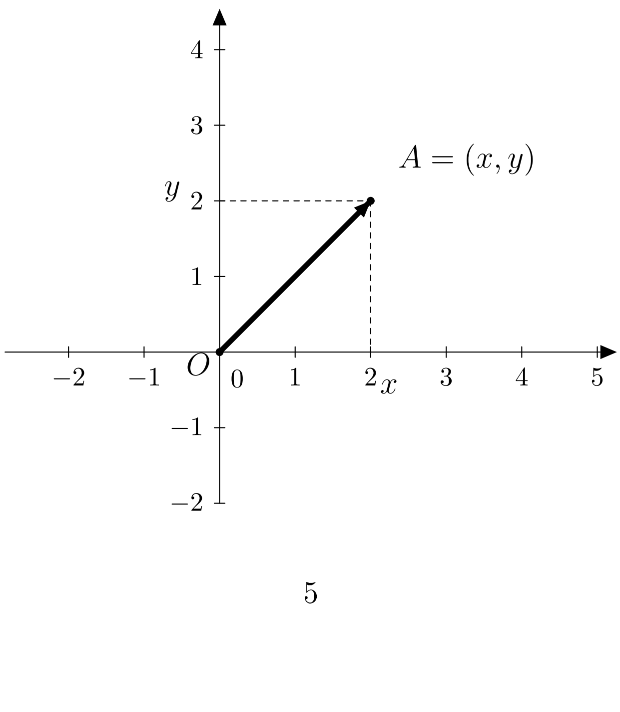
1.1. Vettori nel piano

Se introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, allora questo si può identificare con $\mathbb{R}^2$, l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali.

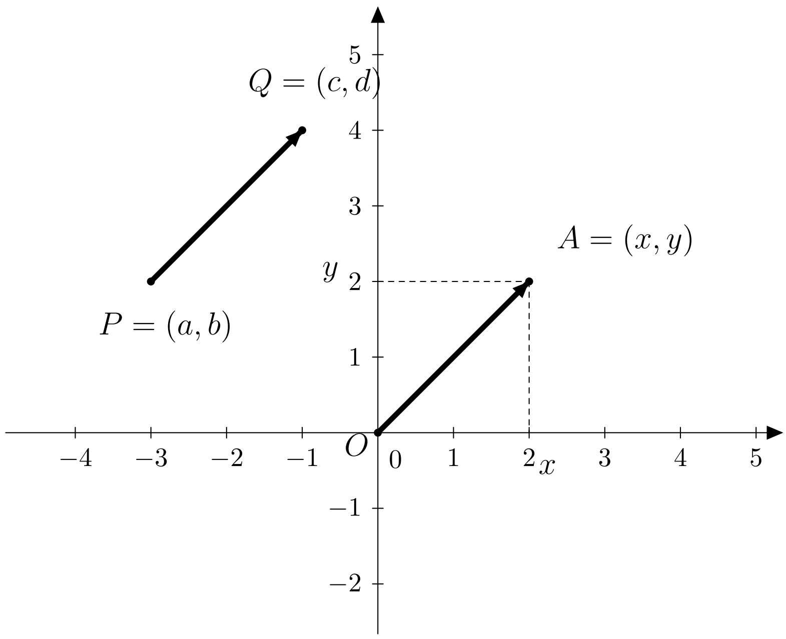
Dato un punto $A = (x, y)$ ad esso è associato il vettore $\underline{v} = OA$. Viceversa, ad ogni vettore $\underline{v}$ è associata un'unica freccia che ha come primo estremo l'origine e come secondo estremo un punto $A = (x, y)$.

In questo modo è possibile identificare il punto A di coordinare (x, y) con il vettore posizione OA. Potremo allora scrivere $\mathbf{v} = (x, y)$ invece di $\mathbf{v} = OA$. I numeri x, y si dicono COMPONENTI SCALARI di $\mathbf{v}$. Si noti che (dal teorema di Pitagora)

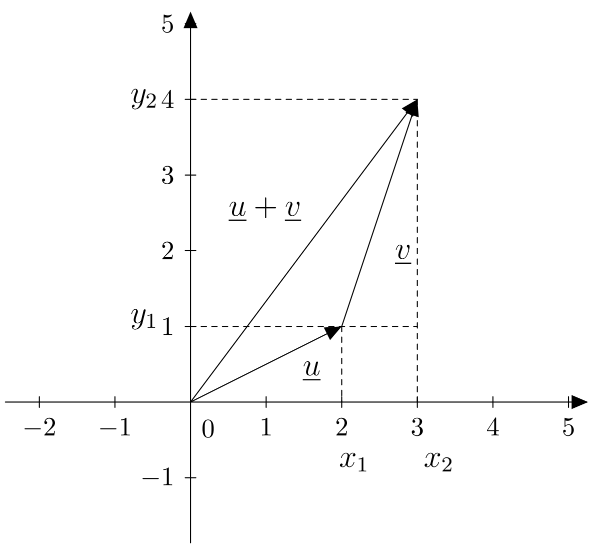
$$|\mathbf{v}| = \text{ lunghezza di } OA \ = \sqrt{x^2 + y^2}$$

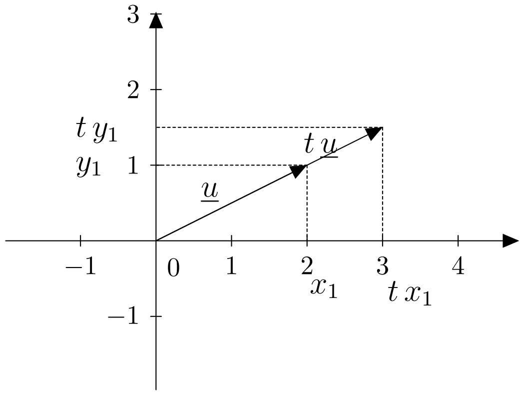


D'altra parte, presi due punti $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ nell'ordine, essi individuano il vettore di componenti scalari $x = c - a$, $y = d - b$ quindi possiamo scrivere $PQ = (c - a, d - b)$; OA e PQ rappresentano lo stesso vettore le cui componenti scalari sono $x = c - a$ e $y = d - b$.



La somma e il prodotto per uno scalare si fanno componente per componente. Se infatti $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ allora si ha che $\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$ e $t\mathbf{u} = (tx_1, tx_2)$.





Queste operazoni sono fondamentali perché permettono di eseguire le operazioni sui vettori per via analitica e non basandosi su costruzioni geometriche.
I vettori $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$ sono diretti come gli assi coordinati, hanno lunghezza unitaria (sono versori) e sono ortogonali tra di loro. Inoltre ogni vettore si può esprimere nel seguente modo

$$\mathbf{v} = (x, y) \qquad \mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Si vedrà in seguito che questo significa che *ogni vettore del piano può essere espresso come combinazione lineare dei versori* **i** *e* **j**.
I versori **i** e **j** si dicono VERSORI FONDAMENTALI DEL PIANO.

1.2. Vettori nello spazio

Analogamente, se introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio tridimensionale, con origine nel punto O di riferimento, questo si può identificare con l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate (x, y, z) di numeri reali. Di solito si sceglie una terna di assi ortogonali in modo che l'orientazione sia *destrorsa*, cioè se indice e medio della mano destra puntano rispettivamente nel verso positivo degli assi x e y, allora il pollice punta nel verso positivo dell'asse z.
La distanza tra due punti $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ si introduce come

$$PQ = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2}$$

(diagonale di un parallelepipedo). Il vettore $\mathbf{v} = PQ$ ha componenti scalari $x = (a - a')$, $y = (b - b')$, $z = (c - c')$ e coincide con il vettore OA vettore posizione del punto $A = (x, y, z)$. Si può scrivere allora $\mathbf{v} = (x, y, z)$ invece che $\mathbf{v} = OA$.
La lunghezza di $\mathbf{v}$ coincide con la lunghezza di PQ, cioè

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

I vettori $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono versori (cioè hanno lunghezza unitaria), sono mutuamente ortogonali e sono diretti nel verso positivo dei 3 assi. Inoltre ogni altro vettore si può scrivere nella forma $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
I versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono VERSORI FONDAMENTALI NELLO SPAZIO. Anche in questo caso le operazioni di somma e prodotto per uno scalare si possono eseguire componente per componente.

1.3. Prodotto scalare

Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nel piano o nello spazio, il loro PRODOTTO SCALARE o PRODOTTO INTERNO denotato con

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \qquad \text{o} \qquad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

è dato per definizione dalla formula

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos\alpha$$

dove α è l'angolo compreso tra i due vettori (si considera $0 \leq \alpha \leq \pi$).
Il prodotto scalare di due vettori è un numero reale. Elenchiamo ora le principali proprietà del prodotto scalare:
✏ è commutativo: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;
✏ è distributivo rispetto alla somma $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$;
✏ $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
✏ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$;
✏ $\boxed{\mathbf{v} \text{ è perpendicolare a } \mathbf{w} \text{ se e soltanto se } \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.}$

In termini di componenti: in $\mathbb{R}^2$, siano $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$; allora si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2.$$

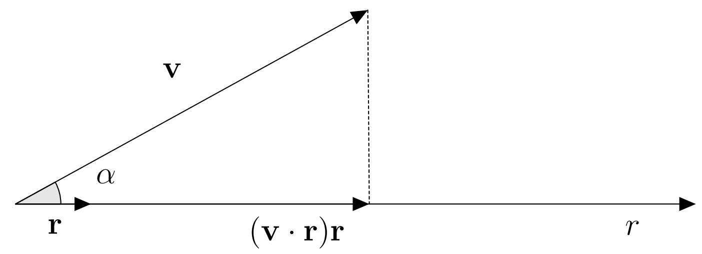
Invece in $\mathbb{R}^3$, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ allora si ottiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3.$$

❒ **Definizione 1.3.1.** La PROIEZIONE di un vettore $\mathbf{v}$ su una retta r orientata si chiama COMPONENTE VETTORIALE di $\mathbf{v}$ rispetto all'asse r ed è data dal vettore

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}, \tag{1.3.1}$$

dove $\mathbf{r}$ è il versore lungo la retta r. Infatti $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{v}||\mathbf{r}| \cos\alpha = |\mathbf{v}| \cos\alpha$ dove α è l'angolo compreso tra la il vettore e la retta (si noti che $|\mathbf{r}| = 1$). Quindi $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}|$ dà la lunghezza del vettore proiezione; il segno di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ (> 0 se $\alpha < \frac{\pi}{2}$ e < 0 se $\alpha > \frac{\pi}{2}$) ne determina il verso.



1.4. Prodotto vettoriale

Dati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il PRODOTTO VETTORIALE $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è un vettore caratterizzato dalle seguenti proprietà:
1) lunghezza: $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \sin\alpha$, dove $0 \leq \alpha \leq \pi$ è l'angolo formato dai due vettori. La lunghezza del vettore rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
2) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è perpendicolare al piano di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
3) $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ rappresenta una terna destrorsa.
Elenchiamo ora le principali proprietà del prodotto vettoriale:
✏ è anticommutativo: $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$;
✏ è distributivo rispetto alla somma: $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$;
✏ $\forall t \in \mathbb{R}\ (t\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = t\,(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$;
✏ $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \underline{0}$;
✏ $\boxed{\mathbf{v} \text{ è parallelo a } \mathbf{w} \text{ se e soltanto se } \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \underline{0}.}$
A livello di componenti: se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ allora

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)\mathbf{i} + (x_3\,y_1 - x_1\,y_3)\mathbf{j} + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\mathbf{k}.$$

Usando la nozione di determinante di una matrice (sviluppando simbolicamente secondo la prima riga) si ottiene (alternativamente si può usare la regola di *Sarrus*)

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Notiamo dunque che la condizione di parallelismo espressa tra le proprietà precedenti può essere interpretata in termini matriciali nel modo seguente:
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \underline{0}$ se e soltanto se il determinante della matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = 0$ se e soltanto se

ogni determinante delle sottomatrici 2×2 della precedente catena di uguaglianze è uguale a zero se e soltanto se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli.

1.5. Prodotto misto

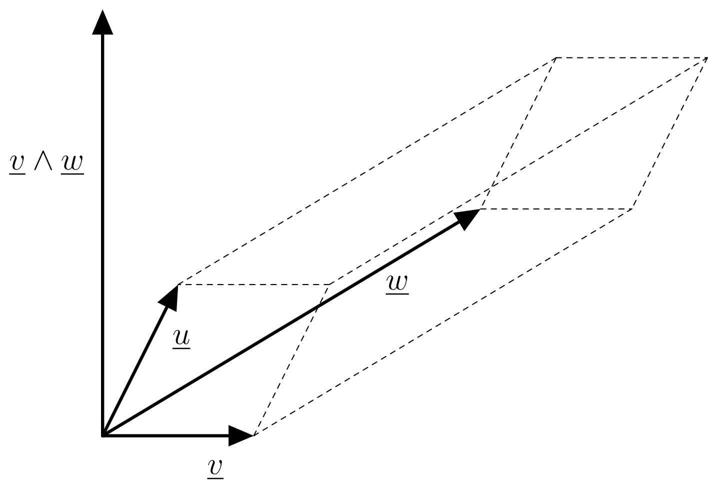
Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono tre vettori nello spazio tridimensionale, il loro prodotto misto è definito dal numero reale

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Le parentesi sono inutili perché la scrittura è univoca (non si potrebbe fare $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ perché il prodotto scalare tra due vettori dà uno scalare a cui non si può applicare il prodotto vettoriale per un terzo vettore).
Il prodotto misto non varia permutando ciclicamente i 3 vettori:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}.$$

Geometricamente il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. L'area di base è data da $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ mentre l'altezza è data dalla componente di $\mathbf{u}$ nella direzione $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ perpendicolare alla base.



Quindi una conseguenza importante di questa interpretazione geometrica è data da:

$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ sono complanari.}}$

Infatti, se il prodotto misto dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ è nullo, allora significa (per una proprietà

del prodotto scalare) che $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ e pertanto giace nel piano individuato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, da cui la complanarità dei tre vettori.
A livello di componenti, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ allora si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1).$$

In termini matriciali, questa scrittura può essere interpretata come

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Il modulo del determinante rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Poiché a sua volta il volume del parallelepipedo è nullo se e soltanto se i 3 vettori che lo generano sono complanari, si ha anche che il determinante 3×3 della precedente matrice è nullo se e soltanto se le sue righe (o colonne) sono 3 vettori complanari. In seguito vedremo che questo significa che i tre vettori sono *linearmente dipendenti*.

1.6. Spazi vettoriali astratti

Abbiamo visto come i vettori nel piano o nello spazio si possano identificare, previa la scelta di un adeguato sistema di riferimento, con coppie o terne ordinate di numeri reali, rispettivamente; una volta che questa scelta è stata fatta, è possibile eseguire le operazioni fondamentali sui vettori (somma e prodotto per scalari) operando direttamente su queste coppie o terne (quelle che abbiamo denominato *componenti* dei vettori). Questi fatti suggeriscono la possibilità di considerare ulteriori generalizzazioni. Per esempio, per prima cosa possiamo considerare n-uple ordinate di numeri reali come vettori dello spazio astratto di n dimensioni $\mathbb{R}^n$. Sia dunque

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\};$$

analogamente al caso $n = 2, 3$ ci riferiremo agli x_i come alle COMPONENTI del vettore $\mathbf{x}$. È possibile definire in maniera naturale la somma di due vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare come segue

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Non è difficile vedere che queste due operazioni godono delle seguenti proprietà, di nuovo in analogia con il caso $n = 2, 3$:

- PROPRIETÀ DELLA SOMMA:

▷ proprietà associativa

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{1.6.1}$$

▷ proprietà commutativa

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{1.6.2}$$

▷ esiste **0** vettore nullo tale che

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \tag{1.6.3}$$

Precisamente il vettore nullo è $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

▷ per ogni vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ esiste un vettore $-\mathbf{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$ tale che

$$\mathbf{v} + -\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1.6.4}$$

• proprietà del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} && (1.6.5)\\ \lambda(\mu\mathbf{v}) &= (\lambda\,\mu)\mathbf{v} && (1.6.6)\\ \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} && (1.6.7)\\ (\lambda + \mu)\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} && (1.6.8) \end{aligned}$$

Più in generale ancora diamo la seguente definizione.

❐ **Definizione 1.6.1.** (definizione di spazio vettoriale astratto) Si dice spazio vettoriale astratto su un campo $\mathbb{K}$ (i cui elementi si dicono scalari e che nel nostro caso sarà essenzialmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) un insieme V di elementi, detti vettori per i quali sono definite un'operazione di somma che associa ad ogni coppia di elementi di V un altro (unico) elemento di V e un'operazione di prodotto che associa ad ogni coppia formata da un elemento di V e da uno di $\mathbb{K}$ un (unico) elemento di V tali che le proprietà (1.6.1)–(1.6.8) sono verificate.

✎ **Esempio 1.6.2.** *Indichiamo con il simbolo $\mathbb{R}_n[x]$ i polinomi di grado minore o uguale a n a coefficienti in $\mathbb{R}$, cioè sia*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n \,:\, a_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \,:\, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osservazioni:
1) due polinomi sono uguali se hanno lo stesso grado e $a_k = b_k$ per ogni $k \in \{0, \ldots, n\}$;
2) il grado è minore o uguale a n, quindi per esempio se consideriamo $\mathbb{R}_2[x]$, si ha che $2 + 5x \in \mathbb{R}_2[x]$.

Dimostriamo che $\mathbb{R}_n[x]$ è spazio vettoriale. Occorre prima di tutto introdurre le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Presi due polinomi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

si definisce l'operazione di somma in questo modo:

$$f(x) + g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

mentre il prodotto scalare per vettore si definisce in questo modo:

$$\lambda\, f(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda\, a_k)x^k \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Andiamo ora a dimostrare le 8 proprietà di spazio vettoriale.

✏ $\forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x],\ f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \\ &\overset{\text{definizione di somma di polinomi}}{=} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k \\ &\overset{\text{somma commutativa in } \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} (b_k + a_k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= g(x) + f(x). \end{aligned}$$

✏ $\forall f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}_n[x],\ (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$

$$
\begin{aligned}
(f(x)+g(x))+h(x) &= \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+\sum_{k=0}^{n}c_kx^k\\
&\overset{\text{definizione di somma di polinomi}}{=} \sum_{k=0}^{n}((a_k+b_k)+c_k)x^k\\
&\overset{\text{proprietà dei numeri reali}}{=} \sum_{k=0}^{n}(a_k+(b_k+c_k))x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum_{k=0}^{n}(b_k+c_k)x^k\\
&= f(x)+(g(x)+h(x)).
\end{aligned}
$$

✏ *esiste* $\underline{0}$ *tale che* $f(x)+\underline{0}=f(x)$ *per ogni* $f(x)\in\mathbb{R}_n[x]$

Basta prendere il polinomio con coefficienti tutti nulli (il polinomio nullo).

✏ *per ogni* $f(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ *esiste* $g(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ *tale che* $f(x)+g(x)=\underline{0}$.

Sia $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$, *con* $a_i\in\mathbb{R}$. *Allora l'opposto di* f *in* $\mathbb{R}_n[x]$ *è* $g(x)=\sum_{k=0}^{n}(-a_k)x^k$ *dove* $a_k+(-a_k)=0$.

✏ $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall f(x)\in\mathbb{R}_n[x]\ (\lambda_1\,\lambda_2)f(x)=\lambda_1(\lambda_2 f(x))=\lambda_2(\lambda_1 f(x))$

Sia $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ *con* $a_i\in\mathbb{R}$. *Allora per definizione di prodotto per uno scalare si ha*

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1\,\lambda_2)f(x) &= \sum_{k=0}^{n}[(\lambda_1\,\lambda_2)a_k]x^k\\
&\overset{\text{proprietà dei numeri reali}}{=} \sum_{k=0}^{n}[\lambda_1\,(\lambda_2\,a_k)]x^k\\
&= \lambda_1\sum_{k=0}^{n}(\lambda_2\,a_k)x^k=\lambda_1\,(\lambda_2\,f(x))\\
&\overset{\text{proprietà dei numeri reali}}{=} \sum_{k=0}^{n}[\lambda_2\,(\lambda_1\,a_k)]x^k\\
&= \lambda_2\sum_{k=0}^{n}(\lambda_1\,a_k)x^k=\lambda_2\,(\lambda_1\,f(x)).
\end{aligned}
$$

✏ $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \forall f(x)\in\mathbb{R}_n[x]\ (\lambda_1+\lambda_2)f(x)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f(x)$

Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$. *Allora per definizione di prodotto per uno scalare si ha*

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2) f(x) &= \sum_{k=0}^{n} [(\lambda_1 + \lambda_2) a_k] x^k \\ &\overset{\text{proprietà distributiva su } \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} [\lambda_1 a_k + \lambda_2\, a_k] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda_1 a_k) x^k + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_2 a_k) x^k \\ &= \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(x).\end{aligned}$$

$\boxed{✏\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x]\ \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)}$

Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *e* $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ *con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. *Allora per definizione delle operazioni di somma e prodotto per uno scalare tra polinomi si ha*

$$\begin{aligned}\lambda(f(x) + g(x)) &= \sum_{k=0}^{n} [\lambda(a_k + b_k)] x^k \\ &\overset{\text{proprietà distributiva su } \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n} [\lambda a_k + \lambda\, b_k] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k + \sum_{k=0}^{n} (\lambda b_k) x^k \\ &= \lambda f(x) + \lambda g(x).\end{aligned}$$

$\boxed{✏\ \forall f(x) \in \mathbb{R}_n[x]\ 1\, f(x) = f(x)}$

Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$. *Allora per definizione di prodotto per uno scalare e dalle proprietà dei numeri reali si ha*

$$1\, f(x) = \sum_{k=0}^{n} (1\, a_k)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = f(x).$$

Riassumendo si vede che le proprietà di spazio vettoriale dei polinomi vengono ereditate dalle proprietà di spazio vettoriale di $\mathbb{R}$.

1.7. Sottospazi vettoriali

❒ **Definizione 1.7.1.** Sia V uno spazio vettoriale e W un sottoinsieme di V. Se W munito delle stesse operazioni definite in V risulta anch'esso uno spazio vettoriale, diremo che W è un SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) di V.

• CRITERIO DI RICONOSCIMENTO DEI SOTTOSPAZI si può verificare che condizione necessaria e sufficiente affinché $W \subset V$ sia un sottospazio vettoriale di V è che valgano le seguenti condizioni

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W, \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W \tag{1.7.1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in W, \ \lambda \mathbf{u} \in W \tag{1.7.2}$$

che sono equivalenti alla seguente condizione

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W, \ \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \ \ \lambda \mathbf{u} + \lambda' \mathbf{v} \in W. \tag{1.7.3}$$

☞ **Osservazione 1.7.2.** `Si può dimostrare (vedi [L], pag. 13-14) che i sottospazi di` $\mathbb{R}^2$ `sono di tre tipi:`
`1) il sottospazio costituito dal solo vettor nullo;`
`2) ogni retta passante per l'origine;`
`3) l'intero spazio` $\mathbb{R}^2$
`In modo analogo si dimostra che i sottospazi di` $\mathbb{R}^3$ `sono di quattro tipi:`
`1)il sottospazio costituito dal solo vettor nullo;`
`2) ogni retta passante per l'origine;`
`3) ogni piano passante per l'origine;`
`4) l'intero spazio` $\mathbb{R}^3$.

✎ **Esempio 1.7.3.** *L'insieme*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

non è un sottospazio: infatti è vero che è un insieme chiuso rispetto alla somma, cioè se $(x_1, y_1) \in W$, $(x_2, y_2) \in W$ *allora* $y_1 \geq 0$ *e* $y_2 \geq 0$, *dunque* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$ *perché* $y_1 + y_2 \geq 0$. *D'altra parte si vede facilmente che se* $(x, y) \in W$ *e* $\lambda < 0$ *allora* $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \notin W$.

✎ **Esempio 1.7.4.** *Siano* W_1, W_2 *due sottospazi di uno spazio vettoriale* V. *Mostriamo che*

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in W_1 \ \text{ e } \ \mathbf{v} \in W_2\}$$

è un sottospazio di V.
Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$. *Mostriamo che* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$. *Dall'ipotesi* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$, *si ha in particolare che* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_1$ *ma* W_1 *è un sottospazio, quindi* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_1$. *D'altra parte, sempre dall'ipotesi* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$ *si ha che in particolare* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W_2$ *ma anche* W_2 *è un sottospazio, quindi* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_2$. *Pertanto riassumendo* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2$ *che è quello che volevamo dimostrare.*
Sia ora $\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dall'ipotesi in particolare si ha che* $\mathbf{v} \in W_1$ *e* $\mathbf{v} \in W_2$, *ma* W_1 *e* W_2 *sono sottospazi, quindi in particolare* $\lambda\mathbf{v} \in W_1$ *e* $\lambda\mathbf{v} \in W_2$ *quindi* $\lambda\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ *che è quello che volevamo dimostrare.*

✎ **Esempio 1.7.5.** *Siano W_1, W_2 due sottospazi di V. In generale l'insieme*

$$W_1 \cup W_2 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in W_1 \quad \vee \quad \mathbf{v} \in W_2\}$$

non è un sottospazio. Infatti se consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ e

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \qquad W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

dall'Osservazione 1.7.2 si ha che entrambi W_1 e W_2 sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$ ma presi ad esempio $(0, 1) \in W_1$ e $(1, 0) \in W_2$ allora $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$

❒ **Definizione 1.7.6.** Sia V spazio vettoriale e siano W_1, W_2 sottospazi di W. Allora definiamo la SOMMA dei due sottospazi come l'insieme

$$W_1 + W_2 := \{\mathbf{v} \in V : \exists \mathbf{w}_1 \in W_1,\ \exists \mathbf{w}_2 \in W_2 :\ \mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\} \tag{1.7.4}$$

☞ **Osservazione 1.7.7.** `Se` W_1, W_2 `sono sottospazi, allora` $W_1 + W_2$ `è sottospazio.`

Infatti siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$. Dobbiamo mostrare che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$. Ma per definizione di $W_1 + W_2$ si ha che esistono $\mathbf{w}_1, \tilde{\mathbf{w}}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2, \tilde{\mathbf{w}}_2 \in W_2$ tali che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad \mathbf{v}_2 = \tilde{\mathbf{w}}_1 + \tilde{\mathbf{w}}_2.$$

D'altra parte W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali e dunque $\mathbf{w}_1 + \tilde{\mathbf{w}}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_2 \in W_2$ quindi

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_1 + \tilde{\mathbf{w}}_2 = \underbrace{\mathbf{w}_1 + \tilde{\mathbf{w}}_1}_{\in W_1} + \underbrace{\mathbf{w}_2 + \tilde{\mathbf{w}}_2}_{\in W_2}$$

pertanto $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$.
Ora, sia $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora per definizione di $W_1 + W_2$ si ha che esistono $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Ma W_1 e W_2 sono sottospazi, quindi $\lambda\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\lambda\mathbf{w}_2 \in W_2$. Pertanto

$$\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \underbrace{\lambda\mathbf{w}_1}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda\mathbf{w}_2}_{\in W_2}$$

e dunque $\lambda\mathbf{v} \in W_1 + W_2$.

☞ **Osservazione 1.7.8.** $W_1 + W_2$ `è il più piccolo sottospazio che contiene sia` W_1 `che` W_2`, cioè se esiste un altro sottospazio` W `tale che` $W \supset W_1$ `e` $W \supset W_2$ `allora necessariamente` $W \supset W_1 + W_2$`.`

Prima di tutto è facile vedere che $W_1 \subset W_1 + W_2$. Infatti sia $\mathbf{w}_1 \in W_1$ allora, siccome W_2 è sottospazio, $\mathbf{0} \in W_2$ e

$$\mathbf{w}_1 = \underbrace{\mathbf{w}_1}_{\in W_1} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W_2}$$

d'altra parte anche $W_2 \subset W_1 + W_2$; infatti preso $\mathbf{w}_2 \in W_2$ si ha

$$\mathbf{w}_2 = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W_1} + \underbrace{\mathbf{w}_2}_{\in W_2}.$$

Sia ora W un generico sottospazio tale che $W_1 \subset W$ e $W_2 \subset W$. Mostriamo che $W_1 + W_2 \subset W$. Sia dunque $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$. Dobbiamo mostrare che $\mathbf{v} \in W$. Per ipotesi $\mathbf{v} \in W_1 + W_2$ quindi esistono $\mathbf{w}_1 \in W_1 \subset W$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2 \subset W$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Ma W è un sottospazio, quindi essendo in particolare $\mathbf{w}_1 \in W$, $\mathbf{w}_2 \in W$ si ha $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ e la tesi è dimostrata.

☞ **Osservazione 1.7.9.** `La decomposizione del generico vettore di` V `come somma di un elemento di` W_1 `e un elemento di` W_2 `nella` (1.7.4) `in generale non è unica.`

Si consideri infatti il seguente esempio: sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{\alpha(-2, 3, 2) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &:= \{\lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Consideriamo poi il vettore $\mathbf{v} = (2, -3, 2)$. Si ha innanzitutto

$$(2, -3, 2) = -1(-2, 3, -2) + 0(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0)$$

quindi esiste un elemento $\mathbf{w}_1 \in W_1$ (esattamente $\mathbf{w}_1 = -1(-2, 3, -2)$ che corrisponde alla scelta $\alpha = -1$) e un elemento di $\mathbf{w}_2 \in W_2$ (il vettore $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 0)$ che corrisponde alla scelta $\lambda = \mu = 0$) tale che $(2, -3, 2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$.
D'altra parte è anche vero ad esempio che

$$(2, -3, 2) = (-2, 3, -2) + (4, -6, 4)$$

dove $(-2, 3, 2) \in W_1$ (e corrisponde alla scelta $\alpha = 1$) mentre $(4, -6, 4) \in W_2$ (e corrisponde alla scelta $\lambda = 4$, $\mu = -6$).
Vedremo che questa possibilità di scelte multiple dipende essenzialmente dal fatto che $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. L'unicità della decomposizione si ha infatti nel seguente caso.

❒ **Definizione 1.7.10.** Sia V spazio vettoriale e W_1, W_2 sottospazi di V. Si dice che V è SOMMA DIRETTA di W_1 e W_2 e si scrive

$$V = W_1 \oplus W_2$$

se per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un unico $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ed esiste un unico $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tale che

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

In questo caso dunque $\mathbf{v}$ si scrive in maniera unica come somma di un elemento di W_1 e di un elemento di W_2. Gli spazi W_1 e W_2 si dicono SUPPLEMENTARI in V e si ha

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V. \tag{1.7.5}$$

☞ **Osservazione 1.7.11.** `Si dimostra che`

$$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \{V = W_1 + W_2 \text{ e } W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $V = W_1 \oplus W_2$. Allora di sicuro per definizione si ha almeno $V = W_1 + W_2$. Dobbiamo far vedere che $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Supponiamo per assurdo che esista $\mathbf{w} \neq \mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$. Allora l'elemento $2\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{w} \in V = W_1 + W_2$ perché somma di un elemento $\mathbf{w} \in W_1$ e di un elemento $\mathbf{w} \in W_2$. Ma W_1 è sottospazio vettoriale quindi $2\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{w} \in W_1$; pertanto l'elemento $2\mathbf{w} \in V$ si può anche decomporre banalmente come $2\mathbf{w} = 2\mathbf{w} + \mathbf{0}$ che risulta essere un'altra decomposizione di $2\mathbf{w}$ come somma di un vettore di W_1 (cioé $2\mathbf{w}$) e uno (il vettor nullo) elemento di W_2. Questo contrasta con l'ipotesi che la decomposizione sia unica, da cui l'assurdo (si ricordi $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ quindi anche $2\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$).
$\boxed{\Leftarrow}$ Se per ipotesi $V = W_1 + W_2$ vuol dire che per ogni elemento $\mathbf{v} \in V$ esiste almeno un elemento $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e un elemento $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Dobbiamo mostrare che dall'ipotesi $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ segue che tale decomposizione è unica. Supponiamo per assurdo che ne esista un'altra, cioè supponiamo che esistano $\tilde{\mathbf{w}}_1 \in W_1$ e $\tilde{\mathbf{w}}_2 \in W_2$ tali che $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{w}}_1 + \tilde{\mathbf{w}}_2$. Allora uguagliando si ha

$$\underbrace{\mathbf{w}_1 - \tilde{\mathbf{w}}_1}_{\in W_1} = \underbrace{\tilde{\mathbf{w}}_2 - \mathbf{w}_2}_{\in W_2}$$

quindi ad esempio

$$\mathbf{w}_1 - \tilde{\mathbf{w}}_1 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$$

e pertanto la decomposizione è unica.

Teorema 1.7.12. (formula di Grassmann) *Sia V uno spazio vettoriale e siano W_1, W_2 due sottospazi di V di dimensione finita. Allora*

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

In particolare se $V = W_1 \oplus W_2$ si ritrova dalla formula di Grassmann la (1.7.5).

✍ **Esercizio 1.7.13.** $\mathbb{R}^2$ *è spazio vettoriale. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^2$ *sono sottospazi vettoriali*

$$1) E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$
$$2) E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$
$$3) E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}.$$

➼ **R.**

1) Si noti che $(x, y) \in E_1$ se e soltanto se è del tipo $(x, 0)$, per qualche $x \in \mathbb{R}$. Quindi per dimostrare che E_1 è sottospazio vettoriale occorre dimostrare che per ogni $(x, 0), (y, 0)$, $(x, 0) + (y, 0) \in E_1$ e $\lambda(x, 0) \in E_1$ per ogni λ reale.

D'altra parte, dalla definizione di somma di due vettori e prodotto per uno scalare (componente per componente) si ha che

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in E_1 \qquad \lambda(x, 0) = (\lambda x, \lambda 0) = (x', 0) \in E_1$$

per un certo $x' = \lambda x \in \mathbb{R}$. Quindi E_1 è effettivamente un sottospazio vettoriale. In $\mathbb{R}^2$ rappresenta l'asse delle x quindi una retta; la dimensione del sottospazio E_1 è pertanto 1 (il concetto di dimensione sarà chiaro dal prossimo paragrafo).

2) Siano (x, y) e (x', y') elementi di E_2. Allora $x + y = 0 = x' + y'$. Dunque

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in E_2 \iff (x + x') + (y + y') = 0 \iff (x + y) + (x' + y') = 0$$

e l'ultima affermazione è vera dall'ipotesi. D'altra parte, se $(x, y) \in E_2$ allora $x + y = 0$ e

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in E_2 \iff (\lambda x) + (\lambda y) = 0 \iff \lambda(x + y) = 0$$

e questo è vero dall'ipotesi. Quindi E_2 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e rappresenta la bisettrice del secondo e quarto quadrante; la sua dimensione pertanto è 1.

3) Si vede immediatamente che E_3 non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ visto che $(0, 0) \notin E_3$.

✍ **Esercizio 1.7.14.** $\mathbb{R}^3$ *è spazio vettoriale. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$ *sono sottospazi vettoriali.*

$$1)F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$
$$2)F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$$
$$3)F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$
$$4)F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$$
$$5)F_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
$$6)F_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ oppure } x = z\}$$
$$7)F_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \ \vee \ x = -y\}$$
$$8)F_8 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$$
$$9)F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \ \wedge \ z = 3x\}$$

➾ **R.**

1) Il generico elemento di F_1 è del tipo $(0, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$. Dunque siano $(0, y_1, z_1)$ e $(0, y_2, z_2) \in F_1$; allora

$$(0, y_1, z_1) + (0, y_2, z_2) = (0, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F_1$$

perché la prima componente del vettore somma è nulla. D'altra parte

$$\lambda(0, y_1, z_1) = (\lambda\, 0, \lambda y_1, \lambda z_1) = (0, \lambda y_1, \lambda z_1) \in F_1$$

quindi F_1 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Esso rappresenta un piano, precisamente il piano yz, naturalmente passante per l'origine, quindi la sua dimensione è 2.

2) Siano (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due elementi di F_2. Allora per ipotesi $x_1 + y_1 = 0$ e $x_2 + y_2 = 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0\end{aligned}$$

e quest'ultima affermazione è vera per ipotesi. D'altra parte

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in F_2 \ \Leftrightarrow \ (\lambda x_1) + (\lambda y_1) = \lambda(x_1 + y_1) = 0$$

e anche questo è vero dall'ipotesi. Quindi F_2 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta un piano (passante per l'origine) e quindi ha dimensione 2.
`Ricordiamo che in` $\mathbb{R}^3$ `un'equazione cartesiana rappresenta un piano; due equazioni cartesiane rappresentano una retta; in` $\mathbb{R}^2$ `un'equazione cartesiana rappresenta una retta. Quindi la stessa equazione può rappresentare un piano o una retta a seconda dello spazio ambiente: per esempio` $x + y = 0$ `rappresenta un piano in` $\mathbb{R}^3$ `e una retta in` $\mathbb{R}^2$.

3) Siano (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due elementi di F_3. Allora per ipotesi $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ e $x_2 + y_2 + z_2 = 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F_3 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0\end{aligned}$$

e quest'ultima affermazione è vera per ipotesi. D'altra parte

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in F_3 \Leftrightarrow (\lambda x_1) + (\lambda y_1) + (\lambda z_1) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) = 0$$

e anche questo è vero dall'ipotesi. Quindi F_3 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta un piano (passante per l'origine) e quindi ha dimensione 2.

4) Siano (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) due elementi di F_4. Allora per ipotesi $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Quindi

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F_4 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2) = (y_1 + y_2)\end{aligned}$$

ma dall'ipotesi si ha che

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2.$$

D'altra parte

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in F_4 \Leftrightarrow (\lambda x_1) = (\lambda y_1)$$

ma anche questo è vero dall'ipotesi. Quindi F_4 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta un piano (passante per l'origine) e quindi ha dimensione 2.

5) Il generico elemento di F_5 è del tipo (x, x, x) per qualche $x \in \mathbb{R}^3$. Siano dunque (x, x, x) e (y, y, y) due elementi di F_5. Si ha che

$$(x, x, x) + (y, y, y) = (x + y, x + y, x + y) \in F_5$$

dall'ipotesi. E anche

$$\lambda(x, x, x) = (\lambda x, \lambda x, \lambda x) \in F_5$$

quindi F_5 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta una retta (perché è dato da due equazioni cartesiane) passante per l'origine infatti rappresenta l'intersezione dei piani $x = y$ e $x = z$ (ad esempio) e pertanto ha dimensione 1.

6) Si vede facilmente che F_6 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; controesempio: se si considera $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ allora $\mathbf{u} \in F_6$ perché $x = y = 1$ e anche $\mathbf{v} \in F_6$ perché $x = z = 0$ ma $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 2, 0) \notin F_6$ visto che $x \neq y$ e $x \neq z$. L'insieme F_6 rappresenta in $\mathbb{R}^3$ l'unione dei due piani $x = y$ e $x = z$ (diverso dal caso precedente in cui F_5 era l'intersezione dei suddetti piani).

7) Si vede facilmente che F_7 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; controesempio: se si considera $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ allora $\mathbf{u} \in F_7$ perché $x = y = 1$ e anche $\mathbf{v} \in F_7$ perché $x = -y = 1$ ma $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 0, 0) \notin F_7$ visto che $x \neq y$ e $x \neq -y$. Esso rappresenta l'unione dei due piani $x = y$ e $x = -y$.

8) Si vede facilmente che F_8 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ infatti $(0, 0, 0) \notin F_8$. Esso rappresenta un piano non passante per l'origine.

9) Il generico elemento di F_9 è del tipo $(x, 2x, 3x)$ per qualche $x \in \mathbb{R}^3$. Siano dunque $(x, 2x, 3x)$ e $(y, 2y, 3y)$ due elementi di F_9. Si ha che

$$(x, 2x, 3x) + (y, 2y, 3y) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y) = (x + y, 2(x + y), 3(x + y) \in F_9$$

visto che è del tipo $(r, 2r, 3r)$ con $r = x + y$. E anche

$$\lambda(x, 2x, 3x) = (\lambda x, \lambda 2x, \lambda 3x) \in F_9$$

quindi F_9 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta una retta (perché è dato da due equazioni cartesiane) passante per l'origine infatti rappresenta l'intersezione dei piani $y = 2x$ e $z = 3x$ e pertanto ha dimensione 1.

1.8. Dipendenza e indipendenza lineare. Base e dimensione

❒ **Definizione 1.8.1.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (per semplicità). Per COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ a coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ intendiamo un vettore $\mathbf{w} \in V$ del tipo

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k.$$

I numeri α_i, $i = 1, \dots, n$ si dicono COEFFICIENTI della combinazione lineare.
Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, indichiamo con $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei $\mathbf{v}_i$, cioè

$$L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k : \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Si dimostra facilmente che $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è un sottospazio vettoriale di V che chiameremo SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DA $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$
I vettori si dicono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono k numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli per i quali

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

In tal caso (almeno) uno dei vettori $\mathbf{v}_i$ può essere espresso come combinazione lineare degli altri. In caso contrario i vettori $\mathbf{v}_i$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI. Equivalentemente sono linearmente indipendenti se la combinazione lineare che dà il vettor nullo

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

implica che tutti gli α_i, $i = 1, \dots k$ sono nulli.

❒ **Definizione 1.8.2.** Sia V uno spazi vettoriale e supponiamo che esistano n vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$ tali che:
1) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti;
2) ogni altro vettore di V si può scrivere come combinazione lineare degli $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. In altre parole:

$$\forall \mathbf{v} \in V \;\; \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i.$$

Allora si dice che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ costituiscono una BASE di V e che V ha DIMENSIONE n.

☞ **Osservazione 1.8.3.** Un insieme di vettori dunque per essere una base deve soddisfare a due condizioni: essere linearmente indipendenti ed essere un sistema di generatori.
Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti ma non costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ perché non sono un sistema di generatori: è infatti facile verificare che ad esempio $(0, 0, 1) \notin L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

☞ **Osservazione 1.8.4.** I coefficienti v_i, $i = 1, \dots n$ sono stati scelti in $\mathbb{R}$ perché per semplicità abbiamo scelto d'ora in avanti di occuparci di spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. In generale tuttavia $v_i \in \mathbb{K}$.

Proposizione 1.8.5. *Se V ha una base di n vettori, allora ogni altra base ha n vettori.*

☞ **Osservazione 1.8.6.** `Può accadere tuttavia che non esista alcun` n `per cui` V `ammetta una base di` n `vettori. In tal caso si dice che` V `ha` <u>`dimensione infinita.`</u>

✎ **Esempio 1.8.7.** *Lo spazio* $\mathbb{R}_n[x]$ *dei polinomi in una variabile a coefficienti reali di grando minore di* n *(che si è dimostrato essere uno spazio vettoriale) ha dimensione* $n+1$ *e la base canonica risulta*

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = 1, \qquad \tilde{\mathbf{e}}_2 = x, \qquad \tilde{\mathbf{e}}_3 = x^2, \qquad \dots \qquad \tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = x^n.$$

Infatti è facile dimostrare che gli $\tilde{\mathbf{e}}_i$*,* $i = 1, \dots, n+1$ *costituiscono un sistema di generatori visto che il generico polinomio di grado minore o uguale a* n *è*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n$$

e quindi può essere espresso come combinazione lineare degli elementi $\tilde{\mathbf{e}}_i$*. Inoltre è facile vedere che essi sono linearmente indipendenti.*
Invece lo spazio $\mathbb{R}[x]$ *di tutti i polinomi (in una variabile a coefficienti reali) ha dimensione infinita (non ammette un sistema di generatori): infatti se per assurdo esistessero* $p_1(x)$*,* $p_2(x), \dots p_k(x)$ *che generano* $\mathbb{R}[x]$ *allora ogni polinomio sarebbe loro combinazione lineare e avrebbe grado minore o uguale al massimo grado tra i* p_i *e questo è assurdo (basta prendere un polinomio di grado superiore al massimo grado tra i* p_i*).*

Proposizione 1.8.8. *La decomposizione di un vettore* $\mathbf{v}$ *come combinazione lineare dei vettori di una base è unica.*

DIMOSTRAZIONE: se per assurdo si avesse

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \qquad\qquad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{e}_1$$

allora sottraendo si avrebbe

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)\mathbf{e}_i$$

da cui $v_i = w_i$, $i = 1, \dots, n$ per l'indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_i$.

❒ **Definizione 1.8.9.** I coefficienti $v_1, v_2, \dots, v_n$ si chiamano COMPONENTI SCALARI di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

✎ **Esempio 1.8.10.** *In* $\mathbb{R}^n$ *la* BASE CANONICA *è rappresentata dai vettori*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

In particolare in $\mathbb{R}^2$ la coppia di versori $\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1)$ costituisce la base canonica; in maniera analoga la terna di versori $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$ lo è in $\mathbb{R}^3$.

✍ **Esercizio 1.8.11.**

Scrivere la terna ordinata $\underline{x}$ le cui componenti rispetto alla base $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sono $\underline{x} = (1,1,1)$.

Si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= 1\,\mathbf{v}_1 + 1\,\mathbf{v}_2 + 1\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 3(1,0,0) + 2(0,1,0) + (0,0,1) = (3,2,1).\end{aligned}$$

Quindi la terna ordinata richiesta è $(3,2,1)$. Vedremo in seguito come questo esercizio può essere interpretato in termini di matrice del cambiamento di base.

Proposizione 1.8.12. *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, e V_1 è un sottospazio di V, allora si ha*

$$\dim V_1 < \dim V$$

(tranne nel caso banale in cui $V_1 = V$).

✍ **Esercizio 1.8.13.**

([BPS1], pag. 70 N. 20)
In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti gruppi di vettori e per ognuno di essi si dica se sono linearmente indipendenti. In caso negativo, scrivere esplicitamente uno di essi come combinazione lineare degli altri.
a) $(1,2,0,0)$, $(-1,2,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,4,2,2)$
b) $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$
c) $(1,2,3,0)$, $(2,1,0,2)$, $(3,1,4,5)$, $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$

a) Consideriamo una generica combinazione lineare dei vettori $(1,2,0,0)$, $(-1,2,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,4,2,2)$ che danno il vettor nullo, cioè sia

$$a(1,2,0,0) + b(-1,2,0,0) + c(0,0,1,1) + d(0,4,2,2) = (0,0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a, 2a, 0, 0) + (-b, 2b, 0, 0) + (0, 0, c, c) + (0, 4d, 2d, 2d) = (0,0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-b, 2a+2b+4d, c+2d, c+2d) = (0,0,0,0)$$

e questo è equivalente a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b+4d=0 \\ c+2d=0 \\ c+2d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=-d \\ c=-2d \\ d=d \end{cases}$$

Quindi, siccome i coefficienti a, b, c, d non sono tutti nulli, i vettori $(1,2,0,0)$, $(-1,2,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,4,2,2)$ sono linearmente dipendenti. Per esempio scegliendo $d = -1$ si può scrivere il quarto vettore come combinazione lineare degli altri 3:

$$(0,4,2,2) = 1\,(1,2,0,0) + 1(-1,2,0,0) + 2(0,0,1,1).$$

b) Consideriamo una generica combinazione lineare dei vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$ che danno il vettor nullo, cioè sia

$$a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a,a,a,a) + (b,b,b,0) + (c,c,0,0) + (d,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a+b+c+d, a+b+c, a+b, a) = (0,0,0,0)$$

e questo è equivalente a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+b+c=0 \\ a+b=0 \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Quindi, siccome i coefficienti a, b, c, d sono tutti nulli, i vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$ sono linearmente indipendenti.

c) Siccome ci sono 5 vettori in $\mathbb{R}^4$ sicuramente possiamo concludere che essi sono linearmente dipendenti. Verifichiamolo con la definizione. Consideriamo una generica combinazione lineare dei vettori $(1,2,3,0)$, $(2,1,0,2)$, $(3,1,4,5)$, $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ che danno il vettor nullo, cioè sia

$$a(1,2,3,0) + b(2,1,0,2) + c(3,1,4,5) + d(1,0,0,0) + e(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a, 2a, 3a, 0) + (2b, b, 0, 2b) + (3c, c, 4c, 5c) + (d, 0, 0, 0) + (0, e, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a + 2b + 3c + d, 2a + b + c + e, 3a + 4c, 2b + 5c) = (0, 0, 0, 0)$$

e questo è equivalente a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ 2a + b + c + e = 0 \\ 3a + 4c = 0 \\ 2b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{3}c \\ b = -\dfrac{5}{2}c \\ d = \dfrac{10}{3}c \\ e = \dfrac{26}{6}c \end{cases}$$

Quindi, siccome i coefficienti a, b, c, d, e non sono tutti nulli, i vettori $(1, 2, 3, 0)$, $(2, 1, 0, 2)$, $(3, 1, 4, 5)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ sono linearmente dipendenti. Per esempio scegliendo $c = 1$ si può scrivere il terzo vettore come combinazione lineare degli altri 4:

$$(3, 1, 4, 5) = \frac{4}{3}(1, 2, 3, 0) + \frac{5}{2}(2, 1, 0, 2) - \frac{10}{3}(1, 0, 0, 0) - \frac{25}{6}(0, 1, 0, 0).$$

✍ **Esercizio 1.8.14.**

([BPS1], pag. 70 N. 21)
Per quali valori del parametro reale t il vettore $\mathbf{w} = (2, t, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^4$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$? Calcolare la dimensione dello spazio generato da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ al variare di t.

Cercare i valori di t tali per cui $\mathbf{w}$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ significa cercare i valori di t (se esistono) per cui $\mathbf{w}$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, per cui cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) = (2, t, 0, 1) \;\Leftrightarrow\; (a, b, 0, a + b) = (2, t, 0, 1)$$

e questo è equivalente a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = t \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = t \\ b = -1 \end{cases}$$

per cui deve necessariamente essere $t = -1$ per avere che $\mathbf{w}$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Per calcolare la dimensione dello spazio generato dai tre vettori, vediamo se esistono valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. Scriviamo la generica combinazione lineare e poniamola uguale al vettor nullo. Si ha

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(2,t,0,1) = (0,0,0,0)$$
$$\Updownarrow$$
$$(a+2c, b+ct, 0, a+b+c) = (0,0,0,0)$$

e questo è equivalente a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b+ct=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=-ct \\ -c(1+t)=0. \end{cases}$$

A questo punto, applicando la legge di annullamento del prodotto alla terza relazione si ha che se $t=-1$ allora i tre vettori sono linearmente dipendenti e (come visto nella prima parte) ad esempio $\mathbf{w}$ si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; quindi lo spazio generato ha dimensione 2 (infatti si vede facilmente che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono a loro volta linearmente indipendenti). Se invece $t \neq -1$ allora necessariamente deve essere $c=0$ allora anche $a=b=0$ e quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti; lo spazio generato pertanto ha dimensione 3.

✍ **Esercizio 1.8.15.**

([BPS1], pag. 70 N. 23)
Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi $p(x)$ (in una variabile a coefficienti reali) di grado minore o uguale a 3.
a) Verificare che i seguenti vettori costituiscono una base di V:

$$\mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_2 = x+2,\ \mathbf{e}_3 = 2x^2+1,\ \mathbf{e}_4 = x^3+x+1.$$

a) Dobbiamo verificare che i vettori

$$\mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_2 = x+2,\ \mathbf{e}_3 = 2x^2+1,\ \mathbf{e}_4 = x^3+x+1.$$

costituiscono un insieme di generatori di $V = \mathbb{R}_3[x]$ e che sono linearmente indipendenti. Verifichiamo che costituiscono un sistema di generatori.
Sia dunque $a+bx+cx^2+dx^3$ il generico elemento di $\mathbb{R}_3[x]$; dobbiamo dimostrare che esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ numeri reali tali che

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2+dx^3 &= \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 + \lambda_4\mathbf{e}_4 \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 x + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 x^3 + \lambda_3 + \lambda_4 x^3 + \lambda_4 x + \lambda_4 \\ &= \lambda_4 x^3 + 2\lambda_3 x^2 + (\lambda_2+\lambda_4)x + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Questo è equivalente a dover risolvere il seguente sistema, ottenuto uguagliando membro a membro

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ 2\lambda_3 = b \\ \lambda_2 + \lambda_4 = c \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = a \\ \lambda_3 = \dfrac{b}{2} \\ \lambda_2 = c - a \\ \lambda_1 = d - 2c + a - \dfrac{b}{2} \end{cases} \tag{1.8.1}$$

e quindi siamo riusciti a trovare i λ_i in funzione dei coefficienti del polinomio a, b, c, d (che sono numeri reali dati). Quindi effettivamente gli $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, 4$ costituiscono un sistema di generatori.
Verifichiamo ora che sono linearmente indipendenti. Sia

$$\mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \mu_3\mathbf{e}_3 + \mu_4\mathbf{e}_4 = 0$$

la generica combinazione lineare che dà il vettor nullo; dimostriamo che tutti i μ_i, $i = 1, \dots, 4$ sono nulli. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \mu_3\mathbf{e}_3 + \mu_4\mathbf{e}_4 &= \mu_1 + \mu_2(x+2) + \mu_3(2x^2+1) + \mu_4(x^3+x+1) \\ &= \mu_4x^3 + 2\mu_3x^2 + (\mu_2+\mu_4)x + \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4. \end{aligned}$$

Questo è equivalente a dover risolvere il seguente sistema, ottenuto uguagliando membro a membro

$$\begin{cases} \mu_4 = 0 \\ 2\mu_3 = 0 \\ \mu_2 + \mu_4 = 0 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_4 = 0 \\ \mu_3 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi effettivamente gli $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, 4$ costituiscono una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Esprimere x, x^2, x^3 come combinazione lineare dei vettori della base.

È sufficiente trovare le componenti di x, x^2 e x^3 rispetto alla base canonica e poi sostituire i coefficienti nel sistema (1.8.1) per ottenere i coefficienti della combinazione lineare.
Nel primo caso con $p(x) = x$ si ha che $x = 0 + 1\,x + 0\,x^2 + 0\,x^3$ quindi $a = c = d = 0$ e $b = 1$; questo implica (dalla (1.8.1))

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 0;$$

infatti

$$x = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 + \lambda_4\mathbf{e}_4 = -2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = -2 + x + 2.$$

Nel caso $q(x) = x^2$ si ha che $x^2 = 0 + 0\,x + 1\,x^2 + 0\,x^3$ quindi $a = b = d = 0$ e $c = 1$; questo implica (dalla (1.8.1))

$$\lambda_1 = -1/2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 1/2 \quad \lambda_4 = 0;$$

infatti

$$x^2 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x+1).$$

Infine nel caso $r(x) = x^3$ si ha che $x^3 = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + 1\,x^3$ quindi $a = b = c = 0$ e $d = 1$; questo implica (dalla (1.8.1))

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 1;$$

infatti

$$x^3 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4 = 1 - (x+2) + (x^3 + x + 1).$$

c) Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di V costituiscono uno spazio vettoriale e, in caso affermativo, qual è la dimensione del sottospazio.

1) L'insieme dei polinomi di V con termine noto nullo

Chiamiamo V_1 tale sottoinsieme di V e verifichiamo che è un sottospazio di V. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due generici elementi di V_1, per esempio (dovendo avere il termine noto nullo)

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx \qquad q(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x.$$

Allora

$$p(x) + q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x = (a+\tilde{a})x^3 + (b+\tilde{b})x^2 + (c+\tilde{c})x \in V_1$$

perché il termine noto è nullo. D'altra parte

$$\lambda p(x) = \lambda(ax^3 + bx^2 + cx) = (\lambda\, a)x^3 + (\lambda\, b)x^2 + (\lambda\, c)x \in V_1$$

perché di nuovo il termine noto è nullo. Quindi V_1 è sottospazio vettoriale di V. La sua dimensione è 3: infatti non può essere 4 che è la dimensione di V e d'altra parte è facile vedere che i polinomi x, x^2, x^3 costituiscono un sistema di generatori di V_1 e sono anche linearmente indipendenti.

2) L'insieme dei polinomi di V con termine noto positivo.

Sia V_2 tale sottoinsieme. Esso non costituisce un sottospazio di V; controesempio: $x^3 + 1 \in V_2$ ma $-x^3 - 1 \notin V_2$.

$\boxed{\text{3) L'insieme dei polinomi di } V \text{ di grado dispari.}}$

Questo sottoinsieme di V che chiameremo V_3 non è da confondersi con l'insieme dei polinomi di V che sono funzioni dispari. Comunque V_3 non è sottospazio vettoriale; controesempio: $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in V_3$; $q(x) = -x^3 + x^2 + x + 1 \in V_3$ ma $p(x) + q(x) = 2x^2 + 2x + 2 \notin V_3$ perché ha grado pari.

$\boxed{\text{4) L'insieme dei polinomi di } V \text{ per i quali la somma dei coefficienti è nulla.}}$

Sia V_4 tale sottoinsieme. Dimostriamo che V_4 è un sottospazio di V. Siano $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in V_4$ e $q(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} \in V_4$ con la condizione che (dal fatto che sono elementi di V_4) $a + b + c + d = 0$ e $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d} = 0$. Allora

$$
\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d + \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} \\
&= (a + \tilde{a})x^3 + (b + \tilde{b})x^2 + (c + \tilde{c})x + (d + \tilde{d}) \in V_4
\end{aligned}
$$

se e soltanto se

$$(a + \tilde{a}) + (b + \tilde{b}) + (c + \tilde{c}) + (d + \tilde{d}) = (a + b + c + d) + (\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d}) = 0$$

e questo è vero dall'ipotesi. D'altra parte

$$\lambda p(x) = \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (\lambda\, a)x^3 + (\lambda\, b)x^2 + (\lambda\, c)x + (\lambda\, d) \in V_4$$

se e soltanto se

$$(\lambda\, a) + (\lambda\, b) + (\lambda\, c) + (\lambda\, d) = \lambda(a + b + c + d) = 0$$

e questo è vero dall'ipotesi.

Quindi V_4 è sottospazio vettoriale di V. Verifichiamo che la sua dimensione è 3. Per fare questo, dimostriamo che i polinomi

$$p(x) = x - 1 \qquad q(x) = x^2 - x \qquad r(x) = x^3 - x^2$$

(che appartengono a V_4 perché la somma dei loro coefficienti è sempre $1 - 1 = 0$) sono un sistema di generatori linearmente indipendenti e quindi sono una base di V_4.

Verifichiamo che sono un sistema di generatori. Prendiamo il generico polinomio di V_4, cioè $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a + b + c + d = 0$.

Dobbiamo cercare λ_i, $i = 1, 2, 3$ tali che

$$
\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= \lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x) + \lambda_3 r(x) \\
&= \lambda_1(x - 1) + \lambda_2(x^2 - x) + \lambda_3(x^3 - x^2) \\
&= -\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x + (\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + \lambda_3 x^3
\end{aligned}
$$

da cui, uguagliando membro a membro, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \lambda_3 = a \\ \lambda_2 - \lambda_3 = b \\ \lambda_1 - \lambda_2 = c \\ \lambda_1 = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a + b + c \\ \lambda_1 = -d \\ \lambda_2 = a + b \\ \lambda_3 = a \end{cases}$$

e questo è compatibile se si ha $a + b + c = -d$ che è vero dall'ipotesi. Quindi $p(x), q(x), r(x)$ costituisce un sistema di generatori. Verifichiamo che essi siano anche linearmente indipendenti. Sia Sia

$$\mu_1 p(x) + \mu_2 q(x) + \mu_3 r(x) = 0$$

la generica combinazione lineare che dà il vettor nullo; dimostriamo che tutti i μ_i, $i = 1, \ldots, 3$ sono nulli. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = \mu_1 p(x) + \mu_2 q(x) + \mu_3 r(x) &= \mu_1(x-1) + \mu_2(x^2 - x) + \mu_3(x^3 - x^2) \\ &= \mu_3 x^3 + (\mu_2 - \mu_3)x^2 + (\mu_1 - \mu_2)x - \mu_1. \end{aligned}$$

Questo è equivalente a dover risolvere il seguente sistema, ottenuto uguagliando membro a membro

$$\begin{cases} \mu_3 = 0 \\ \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Quindi effettivamente gli V_4 ha dimensione 3 e $p(x), q(x), r(x)$ costituisce una sua base.

✍ **Esercizio 1.8.16.**

Trovare le coordinate di $1 + x^2$ nella base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$.

La base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$ è costituita dai monomi $1, x, x^2, x^3$ per cui le componenti di $1 + x^2$ nella base canonica sono semplicemente $(1, 0, 1, 0)$.

✍ **Esercizio 1.8.17.**

Sia W l'insieme dei polinomi omogenei di terzo grado in x e y. W è sottopazio vettoriale di $\mathbb{R}[x, y]$ (insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali nelle variabili x e y)? Chi è una base?

Il generico polinomio di terzo grado omogeneo in x e y si può scrivere nella forma

$$p(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2. \tag{1.8.2}$$

Siano dunque due generici polinomi elementi di W

$$p(x,y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 \qquad q(x,y) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}y^3 + \tilde{c}x^2y + \tilde{d}xy^2.$$

Allora

$$\begin{aligned} p(x,y) + q(x,y) &= ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + \tilde{a}x^3 + \tilde{b}y^3 + \tilde{c}x^2y + \tilde{d}xy^2 \\ &= (a+\tilde{a})x^3 + (b+\tilde{b})y^3 + (c+\tilde{c})x^2y + (d+\tilde{d})xy^2 \in W \end{aligned}$$

perché è della forma (1.8.2). Allo stesso modo

$$\lambda p(x,y) = \lambda(ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2) = (\lambda a)x^3 + (\lambda b)y^3 + (\lambda c)x^2y + (\lambda d)xy^2 \in W.$$

Quindi W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x,y]$ ed essendo $\mathbf{e}_1(x,y) = x^3$, $\mathbf{e}_2(x,y) = y^3$, $\mathbf{e}_3(x,y) = x^2y$, $\mathbf{e}_4(x,y) = xy^2$ linearmente indipendenti (e dalla (1.8.2) anche un sistema di generatori) essi costituiscono una base di W.

✍ **Esercizio 1.8.18.**

Riconoscere se il seguente insieme costituisce uno spazio vettoriale. In caso affermativo trovarne la dimensione e una base. ($\mathbb{R}_n[x]$ denota lo spazio dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali).

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$

Sia V_1 tale sottoinsieme. Siano (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) due elementi di V_1. Allora per ipotesi $x_1 + 2y_1 + z_1 = 0$ e $x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$. D'altra parte

$$\begin{aligned} (x_1, 2y_1, z_1) + (x_2, 2y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, 2y_1 + 2y_2), z_1 + z_2) \in V_1 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \end{aligned}$$

e quest'ultima affermazione è vera per ipotesi. D'altra parte

$$\lambda(x_1, 2y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda 2y_1, \lambda z_1) \in V_1 \;\Leftrightarrow\; (\lambda x_1) + (2\lambda y_1) + (\lambda z_1) = \lambda(x_1 + 2y_1 + z_1) = 0$$

e anche questo è vero dall'ipotesi. Quindi V_1 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; esso rappresenta un piano (passante per l'origine) e quindi ha dimensione 2. Una base è per esempio data scegliendo i vettori linearmente indipendenti $(1,1,-3)$ e $(0,2,-4)$.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z = 0\}$

Sia V_2 tale sottoinsieme. Si può mostrare che V_2 non è sottospazio vettoriale. Controesempio:

$(-1,1,0)$ e $(0,1,-1)$ stanno in V_2 ma la loro somma che è $(-1,2,-1) \notin V_2$.

$\boxed{\text{c) } \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=10\}}$

Sia V_3 tale sottoinsieme. Si può mostrare che V_3 non è sottospazio vettoriale. Controesempio: $(10,0,0)$ e $(0,0,10)$ stanno in V_3 ma la loro somma che è $(20,0,20) \notin V_3$.

$\boxed{\text{d) } \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] : 2a+3b=0\}}$

Sia V_4 tale sottoinsieme. Mostriamo che V_4 è sottospazio vettoriale. Siano $p(x) = ax^2+bx+c$ e $q(x) = \tilde{a}x^2+\tilde{b}x+\tilde{c}$ due generici polinomi di V_4. Allora si ha

$$p(x)+q(x) = (ax^2+bx+c)+(\tilde{a}x^2+\tilde{b}x+\tilde{c}) = (a+\tilde{a})x^2+(b+\tilde{b})x+(c+\tilde{c}) \in V_4$$

se e solo se $2(a+\tilde{a})+3(b+\tilde{b}) = (2a+3b)+(2\tilde{a}+3\tilde{b}) = 0$ e questo è vero dall'ipotesi. D'altra parte

$$\lambda\,(ax^2+bx+c) = (\lambda a)x^2+(\lambda b)x+(\lambda c) \in V_4$$

se e soltanto se $2(\lambda a)+3(\lambda b) = \lambda(2a+3b) = 0$ e anche questo è vero dall'ipotesi. Dunque V_4 è spazio vettoriale; la dimensione è 2 infatti una base può essere data da

$$p(x) = x^2 - \frac{2}{3}x \qquad q(x) = 1;$$

infatti essi sono linearmente indipendenti; mostriamo che sono anche un sistema di generatori di V_4: soddisfano la condizione $2a+3b=0$ e il generico polinomio ax^2+bx+c con $2a+3b=0$ si può scrivere come $ax^2 - \frac{2}{3}x + c$ e quindi come $ap(x)+cq(x)$.

$\boxed{\text{e) } \{ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x] : 2a+3b=1\}}$

Sia V_5 tale sottoinsieme. Si dimostra che V_5 non è un sottospazio vettoriale. Controesempio: $-x^2+x$ e $2x^2-x$ stanno in V_5 ma la loro somma è x^2 che non sta in V_5.

$\boxed{\text{f) } \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a+c+d=0 \right\}}$

Sia V_6 tale sottoinsieme. Dimostriamo che V_6 è spazio vettoriale. Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V_6 \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in V_6;$$

ciò significa che $a+c+d=0$ e $e+g+h=0$. Allora

$$A+B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in V_6$$

se e soltanto se

$$(a+e)+(c+g)+(d+h) = (a+c+d)+(e+g+h) = 0$$

ma questo è vero dall'ipotesi. D'altra parte

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in V_6$$

se e soltanto se

$$(\lambda a) + (\lambda c) + (\lambda d) = \lambda(a + c + d) = 0$$

e anche questo è vero dall'ipotesi. Dunque V_6 è spazio vettoriale. Si può facilmente dimostrare che una sua base è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(come si sono trovate queste matrici? La relazione tra i coefficienti è $a + c + d = 0$ quindi ad esempio i parametri a, b, c sono liberi e $d = -c - a$. Allora si pone alternativamente $a = 1$ e $b = c = 0$; $a = c = 0$ e $b = 1$; $a = b = 0$ e $c = 1$ e poi d si ricava di conseguenza dalla relazione precedente).

g) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, 2) : a + c + d = 2 \right\}$

Sia V_7 tale sottoinsieme. Proviamo che V_7 non è un sottospazio. Controesempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in V_7 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in V_7$$

ma la loro somma è la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \notin V_7$$

perché $1 + 1 + 2 = 4 \neq 2$.

✍ **Esercizio 1.8.19.**

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a oefficienti reali nell'indeterminata x. Dati $f(x) = 2$, $g(x) = 1 + x$, $h(x) = x + x^2$, $k(x) = 3 + 2x - x^2$, verificare che il sottospazio di V generato da f, g, h, k ha dimensione 3. L'insieme $\{g, h, k\}$ costituisce una base di tale sottospazio?

Si vede immediatamente che $k(x)$ è combinazione lineare di $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Infatti si ha

$$k(x) = 3 + 2x - x^2 = a(x + x^2) + b(1 + x) + 2c$$

dove (risolvendo il sistema ottenuto uguagliando i termini simili) $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$. Quindi i 4 polinomi f, g, h, k sono linearmente dipendenti.
D'altra parte si vede facilmente che $\{f, g, h\}$ costituisce un sistema di generatori linearmente indipendenti. Quindi lo spazio $\mathcal{C}(f, g, h, k)$ ha dimensione 3 e l'insieme $\{g, h, k\}$ non costituisce una base di tale sottospazio (perché si tratta di vettori linearmente dipendenti).

✍ **Esercizio 1.8.20.**

> Per quali valori del parametro reale k il polinomio $3x^2 + kx + 2$ è combinazione lineare dei polinomi $x^2 + 2x + 1$ e $x - 1$? Trovare i coefficienti di combinazione.

Si devono trovare i valori di a, $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$3x^2 + kx + 2 = a(x^2 + 2x + 1) + b(x - 1) = ax^2 + (2a + b)x + (a - b)$$

da cui, uguagliando i termini simili, ci si trova a dover risolvere il sistema

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2a + b = k \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ k = 7 \\ b = 1. \end{cases}$$

Quindi il valore di k richiesto è $k = 1$ e i coefficienti della combinazione sono $a = 3$ 3 $b = 1$, per cui si ha

$$3x^2 + kx + 2 = 3(x^2 + 2x + 1) + (x - 1).$$

✍ **Esercizio 1.8.21.**

> Calcolare dimensione e base di $L(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ con
>
> $$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 2) \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 2, 1) \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 2, 0),$$
>
> dove $L(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ indica il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

Vediamo se $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots 4$ sono linearmente indipendenti. Sia

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \underline{0}$$

la generica combinazione lineare dei $\mathbf{v}_i$ che dà il vettor nullo. Si ha

$$\alpha_1(0, 1, -1, 1) + \alpha_2(1, 0, 1, 2) + \alpha_3(1, -1, 2, 1) + \alpha_4(0, 0, 2, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

da cui, uguagliando componente per componente, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_3=0 \\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=\alpha_3 \\ \alpha_2=-\alpha_3 \\ \alpha_3=\alpha_3 \\ \alpha_4=0. \end{cases}$$

Quindi i vettori $\mathbf{v}_i$, $i=1,\dots,4$ sono linearmente dipendenti. Vedremo in seguito come questo esercizio può essere risolto in termini di rango di una matrice.
Osservando poi che ad esempio $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti, si ottiene che $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ ha dimensione 3 e $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ costituisce una sua base.

1.9. Spazi vettoriali con prodotto scalare

Lavorando in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ sicuramente ci si è imbattuti, oltre che nelle due operazioni caratteristiche di ogni spazio vettoriale (la somma e il prodotto di un vettore per uno scalare) anche in altre due operazioni: il *prodotto scalare di due vettori* (da non confondere appunto con il prodotto di un vettore per uno scalare!) e il *prodotto vettoriale*. Mentre la seconda operazione è caratteristica di $\mathbb{R}^3$, in questo paragrafo mostreremo come estendere l'operazione del prodotto scalare prima al caso di $\mathbb{R}^n$ e poi al caso di generici spazi vettoriali.

❒ **Definizione 1.9.1.** Siano $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ due vettori di $\mathbb{R}^n$. Si definisce PRODOTTO SCALARE di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ il numero reale

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(v_1,v_2,\dots,v_n)\cdot(w_1,w_2,\dots,w_n)=\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \tag{1.9.1}$$

☞ **Osservazione 1.9.2.** Si verifica facilmente che il prodotto definito in (1.9.1) verifica le seguenti proprietà:

(A) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$

(B) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(C) $(t\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=t(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

(D) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0\ \forall\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=0 \Leftrightarrow \mathbf{v}=\mathbf{0}$

❒ **Definizione 1.9.3.** In $\mathbb{R}^n$:
- *due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si dicono* ORTOGONALI *se* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
- *due vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *si dicono* PARALLELI *se* $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ *per qualche* $\lambda \in \mathbb{R}$
- *si dice* MODULO O NORMA *di un vettore* $\mathbf{v}$ *il numero*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}$$

✎ **Esempio 1.9.4.** *Si calcoli la norma del vettore* $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. *Dalla definizione semplicemente si ha*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Teorema 1.9.5. *Il modulo di un vettore soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) positività: $|\mathbf{v}| \geq 0, \quad |\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(ii) omogeneità: $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda| |\mathbf{v}|$

(iii) disuguaglianza triangolare $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$

(iv) disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|$

(i) Discende direttamente dalla corrispondente proprietà **(D)** del prodotto scalare

(ii) Si ha

$$|\lambda \mathbf{v}| := \sqrt{(\lambda \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{v})} \overset{\mathbf{(C)}}{=} \sqrt{\lambda[(\mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{v})]} \overset{\mathbf{(C)}}{=} \sqrt{\lambda^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = |\lambda|\,|\mathbf{v}|$$

(iv) Consideriamo il vettore $\mathbf{v} + t\mathbf{w}$ con $t \in \mathbb{R}$ qualunque. Dalle proprietà del prodotto scalare si ha

$$0 \overset{\mathbf{(D)}}{\leq} (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \overset{\mathbf{(B)},\mathbf{(C)}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\,t\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + t^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}.$$

Si può interpretare la precedente disuguaglianza leggendola in t come: il trinomio di secondo grado in t non è mai negativo, e questo è vero solo se il discriminante è non positivo, cioè

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\,(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) \leq 0 \Rightarrow |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\,(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|$$

(iii) A questo punto questa proprietà discende dalla precedente: si ha infatti

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \overset{\mathbf{(iv)}}{\leq} |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| + |\mathbf{w}|^2 = (|\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|)^2$$

da cui il risultato richiesto.

❒ **Definizione 1.9.6.** La nozione di modulo o norma permette di definire la DISTANZA tra due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ come:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}|.$$

La distanza eredita dalla norma le seguenti proprietà:

(a) **(positività e annullamento)** $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \geq 0 \quad d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$

(b) **(simmetria)** $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(c) **(disuguaglianza triangolare)** $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

Inoltre l'operazione di prodotto scalare si può definire anche in astratto tra spazi vettoriali più generali diversi da $\mathbb{R}^n$.

❒ **Definizione 1.9.7.** Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e supponiamo che sia definita un'operazione che ad ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ associa uno scalare, denotato con $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ o anche $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ in modo che siano soddisfatte le 4 proprietà **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** di Osservazione 1.9.2. Diremo allora che l'operazione è un PRODOTTO SCALARE O PRODOTTO INTERNO in V e che V è uno SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE O SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO.
Due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si dicono ORTOGONALI se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.
Si definisce MODULO O NORMA del vettore $\mathbf{v} \in V$ il numero

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Si definisce infine la distanza tra due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ come

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}|.$$

Vogliamo ribadire che la differenza tra questa definizione e quelle date in precedenza è che prima ci riferivamo esclusivamente allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e per tale spazio abbiamo introdotto dei concetti e derivato delle proprietà, sulla base del prodotto scalare noto in quello spazio, cioè (1.9.1). Qui stiamo generalizzando concetti noti in $\mathbb{R}^n$ a spazi vettoriali *astratti, qualunque*: questo ci tornerà utile in seguito, ad esempio quando parleremo di serie di Fourier, dove i generici elementi degli spazi in gioco non saranno vettori ma funzioni.

1.10. Basi ortonormali

Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione finita dotato di prodotto scalare. Fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ calcoliamo il prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j.$$

Notiamo che se V è (come nel nostro caso) un *qualunque* spazio euclideo (cioè non necessariamente $\mathbb{R}^n$) la formula (1.9.1) non vale! Quindi per calcolare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ abbiamo a disposizione solo le proprietà **(A), (B), (C), (D)** di Osservazione 1.9.2. In particolare, dalla proprietà **(B)** si verifica facilmente che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j. \tag{1.10.1}$$

Questo ci permette di osservare che innanzitutto per calcolare il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ di due vettori qualsiasi è sufficiente conoscere gli n^2 prodotti scalari $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, \dots, n$. Il calcolo poi risulta piuttosto comodo se gli n vettori della base di V risultano essere ORTONORMALI secondo la seguente definizione.

❐ **Definizione 1.10.1.** *Un insieme di vettori (che non costituiscano necessariamente una base!)* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *si dicono* ORTONORMALI *se accade che:*
1) i vettori sono ORTOGONALI *a due a due, cioè:* $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \ i \neq j$
2) ogni vettore ha modulo unitario, cioè: $|\mathbf{e}_i|^2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

Riassumendo si può dire che

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Il simbolo δ_{ij} si dice SIMBOLO DI KRONECKER.

Torniamo al nostro problema. Se la nostra base di partenza dello spazio V è una BASE ORTONORMALE allora nella formula (1.10.1) i conti si semplificano ed è facile vedere che il tutto si riduce a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

cioè ritroviamo la stessa formula (1.9.1) del prodotto scalare di due vettori in $\mathbb{R}^n$!
Altre proprietà discendono dall'uso di una base ortonormale: per esempio si ottiene che

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

che si può esprimere dicendo che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ sono vettori a due a due ortogonali (di modulo qualsiasi) allora si ha

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{v}_i|^2 \tag{1.10.2}$$

che è una sorta di Teorema di Pitagora in versione astratta.

✎ **Esempio 1.10.2.** *In $\mathbb{R}^n$ la base canonica è anche una base ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo.*

✎ **Esempio 1.10.3.** *L'esistenza di una base ortonormale non è unica: ad esempio in $\mathbb{R}^2$ oltre alla base canonica si può verificare che anche la base data dai vettori*

$$\mathbf{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \mathbf{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

è una base ortonormale.

Varrebbe la pena chiedersi se dato un qualunque spazio vettoriale euclideo esista sempre una base ortonormale. La risposta è affermativa come mostra il seguente Teorema.

Teorema 1.10.4. (procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n (quindi dotato di prodotto scalare). Allora V ammette sempre una base ortonormale.*

Diamo solo un'idea della dimostrazione, rimandando a [L, pag 83, Teorema 3.4.8] per la dimostrazione completa.
Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una qualunque base di V. La dimostrazione avviene in due passi:
1) si costruisce a partire dai $\mathbf{v}_i$ una base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ di vettori ortogonali;
2) si normalizza ciascun vettore dividendolo per la sua norma: in questo modo si arriva ad avere una base di vettori ortonormali $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.
Partiamo dal punto 1) e costruiamo la base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ per induzione su n. Per prima cosa poniamo

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 := \mathbf{v}_1.$$

Poi costruiamo $\tilde{\mathbf{e}}_2$ in questo modo:

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1.$$

Il significato geometrico della costruzione è chiaro: dalla formula (1.3.1) possiamo interpretare il secondo termine di $\tilde{\mathbf{e}}_2$ come la componente vettoriale di $\mathbf{v}_2$ lungo la direzione di $\tilde{\mathbf{e}}_1$, pertanto sottraendo questo vettore da $\mathbf{v}_2$ stesso ci si aspetta che il vettore risultante sia ortogonale a $\mathbf{v}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_1$. Facciamo vedere infatti che $\tilde{\mathbf{e}_1} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = 0$. Dalle proprietà del prodotto scalare e ricordando che $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{v}_1$ e che per definizione di norma $\frac{\tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2} = 1$, si ha

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \left(\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1\right) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

Mostriamo inoltre che

$$L(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Questo si mostra facilmente osservando che $\mathbf{v}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_1$ e che per costruzione $\mathbf{v}_2$ è combinazione lineare di $\tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\tilde{\mathbf{e}}_2$; a sua volta $\tilde{\mathbf{e}}_2$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
A questo punto procedendo per induzione si ottiene la seguente costruzione:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{e}}_1 := \mathbf{v}_1 \\
&\tilde{\mathbf{e}}_2 := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1 \\
&\tilde{\mathbf{e}}_3 := \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2}{|\tilde{\mathbf{e}}_2|^2}\tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1 \\
&\vdots \\
&\tilde{\mathbf{e}}_n := \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}}{|\tilde{\mathbf{e}}_{n-1}|^2}\tilde{\mathbf{e}}_{n-1} - \cdots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1
\end{aligned}$$

Allora la base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ è costituita da vettori ortogonali. Per dedurre da questa una base ortonormale, basta dividere ciascun vettore per la sua norma, cioè

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|} \qquad \mathbf{e}_2 := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2}{|\tilde{\mathbf{e}}_2|} \qquad \ldots \qquad \mathbf{e}_n := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_n}{|\tilde{\mathbf{e}}_n|}$$

✎ **Esempio 1.10.5.** *Proviamo a dedurre una base ortonormale a partire dalla base* $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$.
Prima di tutto come verifica, facciamo vedere che effettivamente $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *costituiscono una base di* $\mathbb{R}^3$ (questa verifica, se non è esplicitamente richiesta dall'esercizio, in sede d'esame non è necessario eseguirla).
Vediamo che $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$ *sono linearmente indipendenti. Prendiamo la generica combinazione lineare e poniamola uguale a zero, cioè*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = 0.$$

Lavorando componente per componente si ottiene

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite. Dalla teoria dei sistemi lineari (che vedremo più avanti) o attraverso calcoli diretti si deduce facilmente $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *Quindi i vettori dati sono linearmente indipendenti.*
Vediamo anche che essi sono un sistema di generatori in $\mathbb{R}^3$. *Prendiamo il generico vettore*

$\mathbf{w} = (x, y, z)$ *di* $\mathbb{R}^3$ *e scriviamolo come combinazione lineare dei vettori dati, cioè*

$$\mathbf{w} = (x, y, z) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$$

e vediamo se esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *che si possono esprimere in funzione di* x, y, z *e che realizzano la precedente uguaglianza, ovvero*

$$\begin{cases} x = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ y = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ z = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3. \end{cases}$$

Stavolta si tratta di un sistema lineare non omogeneo che ammette come unica soluzione (trovata o dalla teoria dei sistemi lineari che vedremo o da calcoli diretti)

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{2}{3}x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} \\ &\alpha_2 = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z \\ &\alpha_3 = -x + z \end{aligned}$$

Allora effettivamente $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *costituiscono una base di* $\mathbb{R}^3$*. Ora deduciamo da essi una base ortonormale.*
Seguendo il procedimento di orgonormalizzazione di Gram-Schmidt eseguiamo questa operazione in due passi: per prima cosa deduciamo una base di vettori ortogonali e successivamente li normalizzeremo dividendo ciascuno per la sua norma. Innanzitutto si ha

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 := \mathbf{v}_1 = (2, -1, 2) \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Si ha poi

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1 = (1, 1, 4) - \frac{(1, 1, 4) \cdot (2, -1, 2)}{9}(2, -1, 2) = (1, 1, 4) - (2, -1, 2) = (-1, 2, 2)$$

con $|\tilde{\mathbf{e}}_2| = 3$*. Infine*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2}{|\tilde{\mathbf{e}}_2|^2}\tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|^2}\tilde{\mathbf{e}}_1 = (2, 1, 3) - \frac{(2, 1, 3) \cdot (-1, 2, 2)}{9}(-1, 2, 2) \\ &- \frac{(2, 1, 3) \cdot (2, -1, 2)}{9}(2, -1, 2) = (2, 1, 3) - \frac{2}{3}(-1, 2, 2) - (2, -1, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

con $|\tilde{\mathbf{e}}_3| = 1$*. A questo punto normalizzando*

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_1}{|\tilde{\mathbf{e}}_1|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \mathbf{e}_2 := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_2}{|\tilde{\mathbf{e}}_2|} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \mathbf{e}_3 := \frac{\tilde{\mathbf{e}}_3}{|\tilde{\mathbf{e}}_3|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

L'esistenza di una nozione di ortogonalità e la conoscenza di una base ortonormale gioca un ruolo importante nei problemi di approssimazione. Ad esempio, dato un sottospazio W di uno spazio vettoriale V e un punto $\mathbf{v} \notin W$, un problema rilevante (ad esempio nella teoria delle serie di Fourier) consiste nel trovare il punto di W che ha la minima distanza da $\mathbf{v}$. Prima di enunciare il teorema che dà una risposta in questa direzione, premettiamo la seguente definizione.

❒ **Definizione 1.10.6.** Sia W un sottospazio dello spazio vettoriale euclideo V. Si dice COMPLEMENTO ORTOGONALE O SPAZIO ORTOGONALE di W e si indica con $W^\perp$ lo spazio

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \ \ \forall \mathbf{w} \in W\}$$

☞ **Osservazione 1.10.7.** `Si dimostra che` $W^\perp$ `è sottospazio vettoriale di` W.

Siano infatti $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W^\perp$, allora $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$ e $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in W$. Dalle proprietà **(A)** e **(B)** di Osservazione 1.9.2 si ha che

$$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{w} = 0 \qquad \forall \mathbf{w} \in W,$$

dunque $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W^\perp$. Sia ora $\mathbf{w}_3 \in W^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w} = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in W$. D'altra parte dalla proprietà **(C)** di Osservazione 1.9.2 si ottiene

$$(\lambda \mathbf{w}_3) \cdot \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}) = 0 \qquad \forall \mathbf{w} \in W$$

quindi $\lambda \mathbf{w}_3 \in W^\perp$. E pertanto $W^\perp$ è sottospazio vettoriale di W.

✎ **Esempio 1.10.8.** *Se W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore non nullo (a, b, c). Allora il complemento ortogonale di W è il piano (sottospazio vettoriale di dimensione due)*

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\}.$$

☞ **Osservazione 1.10.9.** `Se` W `è un sottospazio vettoriale di uno spazio euclideo` V `con dimensione` $m < n$ `(`n `è la dimensione di` V`), si può dimostrare che è possibile costruire una base ortonormale del tipo` $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n$ `dove i primi` m `vettori` $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ `sono una base ortonormale di` W `e i restanti` $n-m$ `vettori sono una base ortonormale di` $W^\perp$.

Vale ora il seguente teorema.

Teorema 1.10.10. (proiezione ed elemento di minima distanza) *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e sia W un suo sottospazio. Allora*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

cioè V è somma diretta di W e $W^{\perp}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono unici $w \in W$ e $\tilde{w} \in W^{\perp}$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{w}}$. Il vettore $\mathbf{w}$ si dice PROIEZIONE ORTOGONALE *di $\mathbf{v}$ su W e tra tutti i vettori di V è quello di minima distanza da $\mathbf{v}$.*

Sia $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_k$ una base ortonormale di W (che esiste dal procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt). Allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ scriviamo

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k. \tag{1.10.3}$$

Ovviamente $\mathbf{w} \in W$ perché combinazione lineare degli elementi della base. Inoltre, per ogni $i = 1, \dots, k$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i = 0$$

perché i vettori $\mathbf{w}_i$ costituiscono una base ortonormale. Dunque $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è ortogonale ad ogni elemento di W quindi $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^{\perp}$. Abbiamo dunque provato che $\mathbf{v}$ si decompone come

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{w}}_{\in W} + \underbrace{(\mathbf{v} - \mathbf{w})}_{\in W^{\perp}}.$$

Ora mostriamo che tale decomposizione è unica. Supponiamo infatti per assurdo che $\mathbf{v}$ si possa scrivere come

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{w}} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{w}, \mathbf{u} \in W,\ \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}} \in W^{\perp}.$$

Uguagliando i due termini si ha

$$W \ni \mathbf{w} - \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{w}} \in W^{\perp}$$

quindi esiste un vettore (per ipotesi assurda) non nullo (chiamiamolo $\mathbf{z}$) che appartiene sia a W che a $W^{\perp}$. Ma questo è assurdo perché si avrebbe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in W$ quindi in particolare anche $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$ da cui necessariamente per le proprietà della norma $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Allora $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{u}}$. La decomposizione di $\mathbf{v}$ è unica e $V = W \oplus W^{\perp}$.
Manca da dimostrare che $\mathbf{w}$, tra tutti i vettori di V, è l'elemento di minima distanza da $\mathbf{v}$.
Supponiamo di prendere un qualunque altro elemento $\hat{\mathbf{w}} \in W$. Allora per quanto costruito sopra e ricordando la definizione di distanza, si ha

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} \in W \qquad d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\tilde{\mathbf{w}}|$$

D'altra parte si ha anche

$$\mathbf{v} - \hat{\mathbf{w}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{w}}}_{\in W^\perp} - \underbrace{(\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}})}_{\in W};$$

visto che $\tilde{\mathbf{w}} \in W^\perp$ e $(\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \in W$, allora i vettori $\tilde{\mathbf{w}}$ e $\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ sono ortogonali e possiamo applicare la formula (1.10.2) trovando che

$$d(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}})^2 = |\mathbf{v} - \hat{\mathbf{w}}|^2 \overset{(1.10.2)}{=} |\tilde{\mathbf{w}}|^2 + |\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}|^2 \geq |\tilde{\mathbf{w}}|^2 = d(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2$$

che è quello che volevamo dimostrare.

☞ **Osservazione 1.10.11.** `Concludiamo osservando che per costruire a partire da` $\mathbf{v} \in V$ `l'elemento di` W `che meglio approssima` $\mathbf{v}$ `è sufficiente conoscere una base ortonormale di` W `(vedi la formula` (1.10.3)`).`

✎ **Esempio 1.10.12.** *In $\mathbb{R}^3$ determinare il punto $\hat{\mathbf{w}}$ del piano $x + z = 0$ che ha minima distanza da $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.*
Prima di tutto osserviamo che $x + z = 0$ è un piano per l'origine dunque è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, (di dimensione 2), per l'Osservazione 1.7.2. Chiamiamolo W, cioè sia

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}.$$

Dobbiamo costruire prima di tutto una base ortonormale di W, denotata da $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Su $V = \mathbb{R}^3$ consideriamo la base euclidea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Si vede immediatamente che una possibile base ortonormale è

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 0).$$

Se questo non è immediato, per capirlo, procediamo in questo modo: scegliamo prima un vettore $\mathbf{w} \in W$, per defizione sarà $\mathbf{w} = (x, y, z)$ tale che $x + z = 0$, cioè $x = -z$ e y qualunque; scegliamo $y = 0$ per comodità e $x = -z = 1$, quindi $\mathbf{w} = (1, 0, -1)$. Normalizzando si ottiene $\mathbf{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Ora scegliamo il secondo vettore $\tilde{\mathbf{w}}$, ortogonale al primo, seguendo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Si ha

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$

perché $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{w} = (0, 1, 0) \cdot (1, 0, -1) = 0$. Quindi $\mathbf{w}_2 = \tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{e}_2$ ed è già un vettore di norma 1. La base ortonornale di W risulta quindi come detto prima

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 0).$$

Quindi il punto che realizza la minima distanza da $\mathbf{v}$ *è (secondo la formula* (1.10.3)*)*

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}} &= (\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{w}}_1)\tilde{\mathbf{w}}_1 + (\mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{w}}_2)\tilde{\mathbf{w}}_2 \\
&= \left[(1,2,3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + [(1,2,3)\cdot(0,1,0)](0,1,0) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0,2,0) = (-1,0,1)+(0,2,0) = (-1,2,1).
\end{aligned}
$$

1.11. Bibliografia consigliata

• [BPS1] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: "Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare", Zanichelli.
• [L] F.G. Lastaria, M. Saita: "Appunti di algebra lineare", Politecnico di Milano, Gennaio 2011 (Edizione corretta)